

物理屋のための電子回路論 第2回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年10月5日

2.1.2 伝達関数

改めて、定義をしよう。多くの議論でそうであるように、ここでも時間 t を共通な1次元のパラメタとする。システムが、時間 t に依存する入力 $u(t)$ を受け取り、 $w(t)$ を出力する、とする。これを、汎関数 (あるいは演算子) \mathcal{R} を使って

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} \quad (2.2)$$

と書く。 \mathcal{R} の性質として、物理系では次の2つが要請される。

不変性 システムの伝達特性が、時間によって変化しないこと。

$$\text{任意の時間 } t_1 \text{ に対して } w(t-t_1) = \mathcal{R}\{u(t-t_1)\} \quad (2.3)$$

因果性 原因 u が無い時には、結果 w も現れない。

$$u(t) = 0 \ (t < t_1) \rightarrow w(t) = 0 \ (t < t_1)$$

これらの前提の上で、次の**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つ場合、システムは線形である、という。任意の複素定数 C_1, C_2 に対して

$$\mathcal{R}\{C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)\} = C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t). \quad (2.4)$$

これを、任意数の和の形、

$$\mathcal{R}\left\{\sum_i C_i u_i(t)\right\} = \sum_i C_i w_i(t), \quad (2.5)$$

更に積分形 (連続形)

$$\mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} c(q)u(q,t)dq\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(q)\mathcal{R}\{u(q,t)\}dq \quad (2.6)$$

へと拡張することは容易である。

ここで、連続変数 q を時間そのものにとってしまったらどうだろうか？すなわち、時間を δt の幅に区切って入力 $u(t)$ を各 δt 区間に対する関数の重ね合わせで表すとす。 $|t| \leq \delta t/2$ で1、それ以外で0となる関数 $c(t)$ を考え、これを式で表し、 $\delta t \rightarrow 0$ として積分 (連続) 形で表すと、

$$u(t) = \sum_i u(t_i)c(t-t_i) \rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' u(t')c'(t-t')$$

となって、この c' は言わずと知れたデルタ関数 $c'(t-t') = \delta(t-t')$ である。積分形で表した時に高さが1でなく無限大の関数 c' になってしまったのは無論、 dt' がかかっているからである。式 (2.2) にこれを使い、更に (2.6) を用いると、

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} = \mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(t')\delta(t-t')dt'\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\mathcal{R}\{\delta(t-t')\}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t,t')dt'. \quad (2.7)$$

となる。ここで、 $\xi(t, t')$ は、入力がデルタ関数 $\delta(t - t')$ である時の応答

$$\xi(t, t') \equiv \mathcal{R}\{\delta(t - t')\} \quad (2.8)$$

であり、インパルス応答 (impulse response) と呼ばれる。 $\xi(t, t')$ はまた、重み関数 (weight function) と呼ばれるが、その理由は式 (2.7) から明らかであろう。

$\delta(t)$ に対する応答を $\xi(t)$ と書くと、(2.3) より、 $\xi(t, t_1) = \xi(t - t_1)$ である。(2.7) より、

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t - t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t')\xi(t')dt' \quad (2.9)$$

となる。これはいわゆるたたみこみ (convolution) である。

ここまで、すべて時間軸上 (時間領域) で話を進めてきたが、周波数空間で考えることもできる。この2つの空間における事象表現は、フーリエ変換 (Fourier transform) で結ばれている。すなわち、時間領域での事象表現を $x(t)$ 、その周波数領域での表現を $X(\omega)$ とすると、

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.10)$$

である。関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}$ のように表し、 $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ 、 $W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$ 、 $\Xi(\omega) = \mathcal{F}\{\xi(t)\}$ とする。(2.9) の両辺のフーリエ変換を取ると、

$$W(\omega) = U(\omega)\Xi(\omega) \quad (2.11)$$

となる。この時、 $\Xi(\omega)$ をこのシステムの伝達関数 (transfer function) という。線形なので当然だが、(2.11) から異なる周波数間の結合 (モード間結合) がないことがわかる。

(2.11) は、一定周波数 ω の入力に対する出力の性質を調べたもの、と考えることができる。この時は無限の過去から未来へ一定周波数で振動する入力を考える必要があった。フーリエ変換と類似の積分変換にラプラス (Laplace) 変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \quad (2.12)$$

が存在する。無限の過去ないし未来を考えると、関数自身が発散して手に負えないため、適当なカットオフを入れる必要があるが、今の場合どこに入れても同じなので、扱いやすい $t = 0$ に入れたものである。そこで同様に、入力 $u(t)$ として $t < 0$ でゼロであるもののみを考える。すると、(2.9) のたたみこみは、

$$w(t) = \int_0^{\infty} u(t')\xi(t - t')dt' \quad (2.13)$$

と書くことができる。 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{x(t)\}$ のように表し、 $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$ 、 $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ 、 $\Xi(s) = \mathcal{L}\{\xi(t)\}$ とすると、(2.13) の両辺のラプラス変換を取って

$$W(s) = U(s)\Xi(s) \quad (2.14)$$

と、(2.11) と同型となる。この $\Xi(s)$ も伝達関数と呼ばれる。ラプラス変換は、フーリエ変換のような直交関数系展開係数の形をしていないので簡明な物理的意味付けができないが、インパルス入力に対して緩和 (減衰) 定数 s (時定数 s^{-1}) で緩和する線形系での入力出力の関係を示しているとも見られる。

更に、 s を複素平面へ拡張することを考え、 $s \rightarrow \sigma + i\omega$ とする。 $u(t)$ として $t \geq 0$ でのみゼロでないもの考えると、(2.14) の積分の下限を $-\infty$ に取っても発散することはなくなり、これを使うと、フーリエ変換 (2.10) も同形式になるため、「伝達関数」の表式として (2.14) を共通に使用することができる。特に周波数応答が欲しい場合は、 $s = i\omega$ とすれば良い。以下、周波数応答であることを明示するためには、例えば $W(i\omega)$ のように書くことにする。

2.1.3 システムの電子回路表現とインピーダンス, アドミッタンス

式(1.7)を, V_{12} を出力, I_{12} を入力と考えて

$$w(t) = Ru(t), \quad w(t) = L \frac{du(t)}{dt}, \quad w(t) = \frac{1}{C} \int^t u(t') dt' \quad (2.15)$$

と書くことができる. すなわち, これら3つの受動素子は, このようなシステムの具体的な表現と考えることができる. これをこれらはこのようなシステムの**等価回路** (equivalent circuit) である, と表現することがある.

(2.15)の3つの演算子, R , $L(d/dt)$, $(1/C) \int^t dt'$ は, (2.3), (2.4)を満たしているから, これらは線形システムである. 従って s -空間において, 応答関数が定義できる. 周波数応答を考えることにして $s = i\omega$ についてそれぞれ計算すると,

$$\text{抵抗器} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} [R\delta(t)] dt = R, \quad (2.16a)$$

$$\text{インダクタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \left[L \frac{d}{dt} \delta(t) \right] dt = i\omega L, \quad (2.16b)$$

$$\text{キャパシタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{C} \int^t \delta(t') dt' \right] dt = \frac{1}{i\omega C}. \quad (2.16c)$$

(2.11)より,

$$W(i\omega) = RU(i\omega), \quad W(i\omega) = i\omega LU(i\omega), \quad W(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} U(i\omega) \quad (2.17)$$

である. 電圧, 電流の関係に戻り, $\mathcal{J}(i\omega) = \mathcal{F}\{J_{12}(t)\}$, $\mathcal{V}(i\omega) = \mathcal{F}\{V_{12}(t)\}$ とすると,

$$\mathcal{V}(i\omega) = Z(i\omega)\mathcal{J}(i\omega), \quad (2.18)$$

と, オーム則 (Ohm's law) 形式になる. ただし,

$$\text{抵抗器} : Z(i\omega) = R, \quad (2.19a)$$

$$\text{キャパシタ} : Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C}, \quad (2.19b)$$

$$\text{インダクタ} : Z(i\omega) = i\omega L \quad (2.19c)$$

である. $Z(i\omega)$ を2端子素子の周波数 ω に対する**インピーダンス** (impedance) と呼ぶ. (2.19)では Z はそれぞれ実数または純虚数だが, 一般的表式(2.18)からもわかるように一般の複素数を取り得る.

インピーダンスの逆数 $Y(i\omega) \equiv 1/Z(i\omega)$ を**アドミッタンス** (admittance) と呼ぶ.

$$\mathcal{J}(i\omega) = Y(i\omega)\mathcal{V}(i\omega), \quad (2.20)$$

であるから, (2.18)を, 電流を入力, 電圧を出力とする線形システムの伝達関数がインピーダンス Z であることを表しているとするならば, (2.20)は電圧入力, 電流出力の系の伝達関数がアドミッタンス Y であることを表している*1.

2.2 電源

2端子素子の中でも, やや特殊な「電源」を導入しよう. 「端子」は回路系に境界条件を与えるものとして導入した. 単純な境界条件として, 2端子間に一定の電圧を加える, 一定の電流を流す, というものが考えられる. これらの境界条件付与機能に着目し, 機能ごと素子としてしまったものが電源である. 外部境界条件を回路の内部に取り込むことに相当する.

*1 蛇足だが, このように微分方程式を解き直さなくても除算で済んでしまうのが, Heaviside (1850–1925) を始祖とする演算子法 (operational calculus) の利点である.

2.2.1 電圧源と電流源

(2.18) は、物理的には一定振幅の周波数 ω の電流 (電圧) を素子に加えた時、一定振幅の電圧 (電流) が発生する (流れる) ことを示している。「一定振幅、周波数 ω で振動する電流 (電圧) を素子に加える」のは、系の運動方程式の境界条件として与えられるものであるが、これを回路図という言葉で表現したものが、**電源** (electric power source) あるいは**起電力** (electromotive force) と呼ばれる素子である。

キャパシタなどの場合と同様、理想的な電源 (ideal power source) を考え、これに非理想的な要因を回路素子として付け加えて現実の電源をシミュレートする。理想的電源の代表が、 $\omega = 0$ に相当する直流電圧源、電流源である。

理想直流電圧源は、どのような回路 (電源側から見た供給対象回路のことを、**負荷** (load) を接続しても一定電圧を保つ素子であり、現実の素子では電池がこれに近いものである。この、電池という素子から容易に思いつくように、これまで見てきた受動素子で直流電圧源を表現するとすれば、図 2.2(a) のように、1つのキャパシタで表される。ただし、

$$Q \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow \infty, \quad V = \frac{Q}{C} = \text{const.}$$

のような極限操作を行ったものと考えられる。回路記号的には、右のように電池として表される。

同様に、直流定電流源は図 2.2(b) のように、定電圧源に直列に抵抗器を挿入し、

$$V \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty, \quad J = \frac{V}{R} = \text{const.}$$

という極限操作を行ったものと考えられる。記号としては右に示したように、円に矢印で電流方向を示したものや、円を2つずらせて重ねたものが使用される。「円に矢印」記号は、交流定電流源の記号にも使用され、その性質は注釈等により規定する。

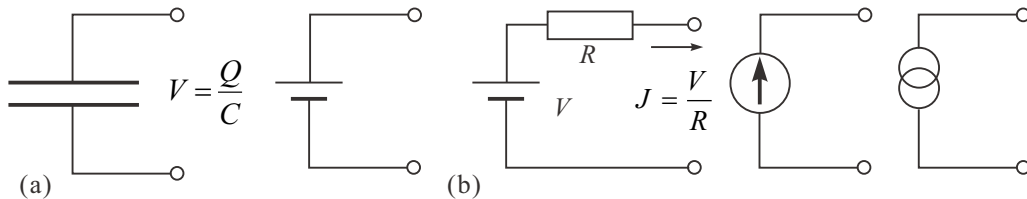
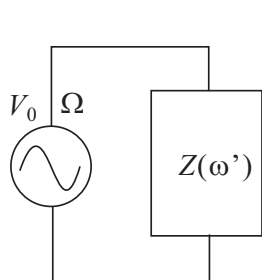


図 2.2 (a) 直流電圧源の等価回路, (b) 直流電流源の等価回路 (いずれも極限操作に関しては、本文参照).

2.2.2 消費電力・交流電源

電圧降下 V があるところに電流 J が流れていれば、単位時間当たり $P = VJ$ のエネルギーがこの回路中から失われる (**エネルギー散逸** (energy dissipation)). これが抵抗器 $R = V/J$ によるものであれば、単位時間当たりエネルギー散逸は $P = V^2/R = J^2R$ となり、多くの場合これはジュール熱 (Joule heat) となって外界に放出される。これを抵抗器の**消費電力** (electric power consumption) と呼ぶ。逆に、電圧 V 、電流 J を供給する電源素子は、単位時間当たり $P = VJ$ のエネルギー湧き出しと考えることができる。



直流定電圧電源を再び周波数が有限値 ω' の場合に拡張し、更に複素数表示を使って $V_{12}(\omega', t) = V_0 e^{i\omega' t}$ としてみる。回路図では、交流電源を丸に波模様の記号で表す。左の図は、このような交流電源がインピーダンス $Z(i\omega)$ の2端子素子に接続されていることを示す回路図である。 $\mathcal{V}(i\omega) = \mathcal{F}\{V_{12}\} = 2\pi V_0 \delta(\omega - \omega')$ より、電流のフーリエ成分は、 $\mathcal{J}(i\omega) = 2\pi V_0 \delta(\omega - \omega')/Z(i\omega)$ となる。電流は、

$$J_{12}(\omega', t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0}{Z(i\omega)} \delta(\omega - \omega') e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{V_0}{Z(i\omega')} e^{i\omega' t} = \frac{V_{12}(\omega', t)}{Z(i\omega')}$$

と、当然ながら周波数を ω' に限り、オーム則を適用すれば良い。

この時、 $Z(i\omega)$ で表される素子での消費電力を考えよう。簡単のため実数表示で考えることとし、 $V_{12} = V_0(e^{i\omega't} + e^{-i\omega't})/2 = V_0 \cos \omega't$ とする。

$$W(\omega', t) = V(\omega', t)J(\omega', t) = V_0^2 \cos^2 \omega't / Z(\omega') \quad (2.21)$$

は一般に複素数であり、また t に依存するため**複素瞬時電力** (complex instantaneous power) と呼ばれている。今の場合、周波数 $2\omega'$ の周期関数であるから、一周期で時間平均すると、

$$W(\omega') = \frac{V_0^2}{2Z(\omega')} \quad (2.22)$$

となる (混乱はないと思うので、時間平均に対しても同じ記号を使用する)。これを複素電力、その実部 $P(\omega') \equiv \text{Re}[W(\omega')]$ を**有効電力** (effective power)、虚部 $Q(\omega') \equiv \text{Im}[W(\omega')]$ を**無効電力** (reactive power)、複素電力の振幅 $|W(\omega')|$ を**皮相電力** (apparent power) とそれぞれ呼ぶ*2。インピーダンスによってエネルギーとして消費されこの系から散逸されるのは、有効電力であり、無効電力は電源と素子との間のエネルギー循環を表している。また、皮相電力に対する有効電力の比

$$I_M \equiv \frac{\text{Re}[W(\omega')]}{|W(\omega')|} = \cos [\arg(W(\omega'))] \equiv \cos \phi \quad (2.23)$$

を**力率** (moment) と呼ぶ。 ϕ は、 $W(\omega')$ の位相角であり、今の場合 $1/Z(\omega') = Y(\omega')$ の位相角である。すなわち、電圧 V と電流 J との位相のずれである。

複素電力が (2.21) のように単純な積で書けたのは、交流電圧を実数表現としたからであるが、複素電力振幅に対する有効電力の比が (2.23) のように、電流電圧の位相のずれ ϕ に対して $\cos \phi$ (無効電力の比は $\sin \phi$) と書けるというのは一般的な結果である。そこで、電圧が一般の複素数表示されていたとして、 $V(\omega') = |V(\omega')|e^{i\theta}$ 、 $J(\omega') = |J(\omega')|e^{i(\theta+\phi)}$ とすると、 $W(\omega') = |W(\omega')|e^{i\phi}$ である。これを一般的に簡潔に表すやり方として

$$W(\omega') = V^*(\omega')J(\omega') \quad (2.24)$$

と、 V の複素共役を取るものが良く使用される。

インピーダンスとして $Z(\omega) = R$ という純粋な抵抗器を考えると、(2.22) より $W = P = V_0^2/2R$ である。これは、電圧 $V_0/\sqrt{2}$ とした時の直流電力の表式に相当する。このように、交流電圧を時間平均した時の直流電圧に相当する値を**実効値** (effective value) と呼ぶ。日本の電灯線の 100V などはこの実効値を示しており、従って、交流振幅はその $\sqrt{2}$ 倍だけある。

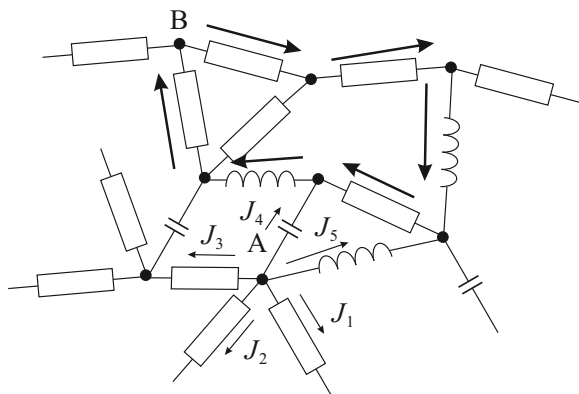


図 2.3 2 端子素子回路網の例

2.3 回路網

2 端子の素子を様々につないでできる回路を考えていくことになるが、ここで、集中定数回路についてごく一般的に成立する簡単で基礎的な定理を見ておくことにしよう。

2.3.1 キルヒホッフの法則

周波数空間において定義したインピーダンスについて、通常の抵抗器接続則と同様に扱うことができる。無論、周波数空間で (2.18) のようにオーム則形に書かれているためである。これら 2 端子素子を導線で結合した際に、電位の一価性と電荷保存則を、電子回路では**キルヒホッフの法則** (Kirchhoff's law) という。図 2.3 の A、B 点のように、複

*2 「無効」や「皮相」とは妙な訳語だが業界用語なので仕方ない。

数の導線が結合している点を結節点と呼ぶ。任意の結節点から流れ出す電流を、 J_i とする。流れ込む電流は負の値で表す。すると、結節点上の電荷保存則より

$$\sum_i J_i = 0 \quad (2.25)$$

である (図では A 点で $J_1 \sim J_5$ で表示)。これはもちろん、電磁気学での連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = 0$$

で、湧き出し/吸い込みがない場合 ($\partial \rho / \partial t = 0$) について、回路網であることからハード的に離散化されたものである。

また、各素子に番号をつけ、番号 j の素子に印加されている電圧 (電圧降下) を V_j と書き、図に示したように B 点を出発して矢印のように一周して B 点に戻る経路上でこれらを加えたとすると、電位の空間一価性より

$$\sum_j V_j = 0 \quad (2.26)$$

でなければならない。電子回路論では、(2.25)、(2.26) をそれぞれキルヒホッフの第 1 法則、第 2 法則 (あるいは、電流則、電圧則) と呼ぶ。

2.3.2 インピーダンスの合成

キルヒホッフの法則より、アドミッタンス (インピーダンス) Y_1, Y_2, \dots, Y_n (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) の 2 端子素子を並列に並べた場合、その合成アドミッタンス Y_{tot} (合成インピーダンス Z_{tot}) は

$$Y_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z_{\text{tot}} = \left(\sum_{i=1}^n Z_i^{-1} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

となるのがわかる。同様に、直列接続の場合は

$$Y_{\text{tot}} = \left(\sum_{i=1}^n Y_i^{-1} \right)^{-1}, \quad Z_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.28)$$

となる。

簡単な例として、右図のように容量 C のキャパシタに抵抗値 R の抵抗が並列接続されているものを考える。現実の単体キャパシタのモデルとも考えることができる。図のように周波数 ω 、振幅 V_0 の交流電源に接続されているとする。合成インピーダンス、アドミッタンスは、

$$Z(i\omega) = \left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)^{-1}, \quad Y(i\omega) = \frac{1}{R} + i\omega C \quad (2.29)$$

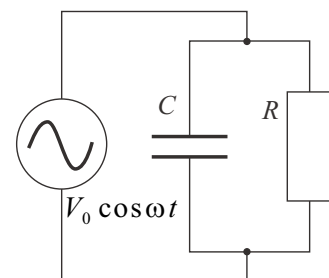
である。これより、有効電力、無効電力はそれぞれ、

$$P(\omega) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t, \quad Q(\omega) = \omega C V_0^2 \cos^2 \omega t \quad (2.30)$$

となる。ここで、循環するエネルギーに対してエネルギーが散逸される割合

$$\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{1}{\omega C R} = \tan \delta \quad (2.31)$$

を誘電正接 (dissipation factor)、 $\delta = \arg W - \pi/2$ を損失角 (loss angle) と呼ぶ。これは、キャパシタの性能を表す重要なパラメーターである。



2.3.3 重ね合わせの定理

線分とそれらの結節点の集合をこれらのトポロジカルな関係に抽象化して議論するのが、グラフ理論と呼ばれるものであり、集中定数回路概念は電子回路をグラフ理論的に扱うための抽象化であると捉えることもできる。すなわち、金属で接続された等電位点を節 (node)、2端子素子を枝 (branch) とする。ここでは枝の向きも考慮する有向グラフ (directed graph, digraph) を考える。

回路網が、起電力と線形な素子のみで出来上がっている場合は、すべての節と閉回路を考慮してキルヒホッフの法則を適用して連立一次方程式が得られ、すべての枝を流れる電流を計算することができる。今、すべての枝を起電力 E_i ($i = 1 \dots m$) と抵抗 R_i により構成されるとする (単なる直結の場合は $E_i = R_i = 0$)。すると、第2法則から、

$$A\{R\} \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \quad A \text{ は } \mathbf{R} \text{ の 1 次 の 行 列} \quad (2.32)$$

である。電流分布 \mathbf{J} は $A^{-1}\mathbf{V}$ から得られることになる。この線形性より次の定理が容易に得られる。

重ねあわせの定理

回路網中に多くの起電力が存在する時の電流は、各起電力が単独に存在する時の電流分布を重ね合わせたものに等しい。

2.3.4 鳳-テブナンの定理

鳳-テブナンの定理は次のようにまとめることができる。

鳳-テブナンの定理

電流の流れている回路網内の任意の2点を、新たに抵抗 R でつなぐ。つなぐ前の2点間の電圧を V_0 、回路内の起電力をすべて短絡して2点間の抵抗を測定した時の値を R_0 とすると

$$J = V_0 / (R + R_0) \quad (2.33)$$

となる。これは、起電力 V_0 、内部抵抗 R_0 の電源に負荷抵抗 R をつないだ時の電流である。

これは、重ねあわせの定理より次のように簡単に証明される。問題の2点間を R と起電力 V_0 でつなぐ (図 2.4) と R の両端の電圧は零であり、電流は流れない。この状態で、この V_0 以外の回路網中の起電力をすべて零にすると、 V_0 に対して R と R_0 の直列回路がつながっていることになるので、流れる電流 J_0 は $-V_0 / (R + R_0)$ である。重ねあわせの定理より、最初の「電流が流れない」条件は $J + J_0 = 0$ であることから、(2.33) が得られる。

鳳-テブナンの定理は、実際に電気回路を相手にして回路図等の詳細な情報が与えられていない時に必要な情報を実験的に得る際などに適用され、応用性の高い定理である。

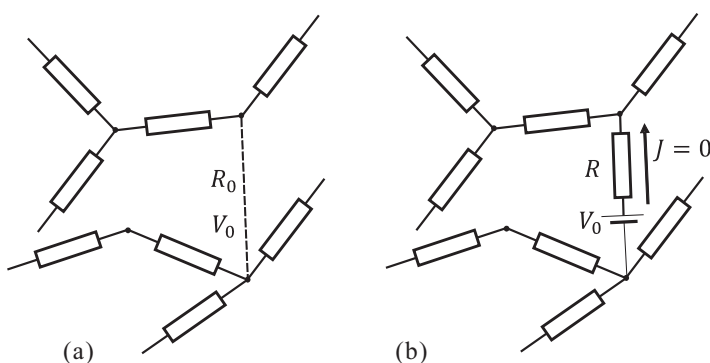


図 2.4 鳳-テブナンの定理の証明

2.3.5 テレヘンの定理

有向グラフの節、枝にそれぞれ指数 $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ を付け、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{節 } i \text{ が枝 } j \text{ の始点,} \\ -1: & \text{節 } i \text{ が枝 } j \text{ の終点,} \\ 0: & \text{節 } i \text{ は枝 } j \text{ の端点でない} \end{cases} \quad (2.34)$$

とする $n \times m$ 行列 $\{a_{ij}\}$ を考える。これを**接続行列** (incidence matrix) という。

すべての j について枝 j は2つの端点を持ちこれらの a_{ij} の和はゼロ、その他の要素はゼロである。すなわち、

$$\forall j: \sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$$

であって、これより接続行列のうち1つの行は消去しても行列の有する情報は変化しない。これは、節のうちどれを接地電位に取るかという任意性が残っていることに相当する。そこで適当に1行を消去した $(n-1) \times m$ 行列 \mathcal{D} を考え、既約接続行列 (irreducible incidence matrix) と呼ぶ。なお、回路が途中で切断されていない連結グラフについて考えている。

\mathcal{D} と (2.32) で導入した各枝を流れる電流 J_j (枝の「向き」を正に取る。その他の物理量についても同じ) を並べたベクトル \mathbf{J} を用いて、キルヒホッフの第1法則は

$$\mathcal{D}\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

と表現することができる。更に、各節の電位 W_i を並べたベクトルを \mathbf{W} 、各枝にかかる電圧 V_j を並べたベクトル \mathbf{V} を導入する。枝 j の両端点節のインデックスが i, k で、 $i \xrightarrow{j} k$ の関係にあるとすると、 $V_j = W_i - W_k = a_{ij}W_i - a_{kj}W_k$ であるから、

$$\mathbf{V} = {}^t\mathcal{D}\mathbf{W} \quad ({}^t\mathcal{D} \text{ は } \mathcal{D} \text{ の転置行列}) \quad (2.36)$$

である。これは、各節の電位が一つの値に定まる、ということで、キルヒホッフの第2法則を表している。

従って

$$\sum_{i=1}^m V_i J_i = ({}^t\mathcal{D}\mathbf{W}) \cdot \mathbf{J} = {}^t\mathbf{W}\mathcal{D}\mathbf{J} = 0 \quad (2.37)$$

である。すなわち、電圧ベクトルと電流ベクトルとは直交している。これが**テレヘンの定理** (Tellegen's theorem) と呼ばれるものである。

(2.37) は、ある回路のある瞬間の \mathbf{V} と \mathbf{J} に関するものであるとするならば、回路全体としてエネルギーの変化がないことを表しているが、それは、電荷保存と電場の一価性すなわちキルヒホッフの法則に基づくものである。枝のトポロジカルな結合関係を表す行列 \mathcal{D} と \mathbf{V} , \mathbf{J} との関係 (2.35) および (2.36) のみから導かれており、これら2つの関係式は、 \mathcal{D} が同じ回路であれば、物理的に異なるものであっても成立するから、(2.37) も成立する。線形性も仮定されていない。

テレヘンの定理

ある回路の電圧ベクトルと、これと同じトポロジカルな接続関係を持つ回路の電流ベクトルとは直交している。

2.4 4端子(2端子対)回路

これまで2端子の素子を単位として線形回路を議論してきた。金属を用いた電気信号の伝播には、例えば信号ラインと接地ラインなど何らかの意味で2つの金属が必要となる。これらに2つの端子を対応させ、**端子対** (terminal pair) として扱うことが良く行われる。端子対には同じ大きさで逆向きの電流が流れる、という境界条件を課す。これまで扱ってきた2端子素子、これらを組み合わせた2端子回路は1端子対回路と見ることができる。

そこで、端子対を1つ増やして2端子対回路 (two-terminal pair circuits) を考えよう。全部の端子数は4であるため、4端子回路と呼ばれることも多い。4つの端子を出した回路とは、対をなす端子間の電流に特別な境界条件が課された形になっている。これは、入力 → 出力の最小ブロックであり、更に回路の構成ブロックとすることが良く行われる。

2.4.1 4端子回路の定義

4端子回路を図2.5のように回路をブラックボックス化して表す。

4端子回路パラメタの取り方として、出力端子の J_{out} , V_{out} を使って入力端子の電流電圧 J_{in} , V_{in} を表す、というものがある。4端子回路はすべて線形素子で構成されているとする。線形性より、 J , V 等はすべて ω 空間 (あるいは s 空間) 要素 $\mathcal{J}(i\omega)$, $\mathcal{V}(i\omega)$ と置きかえても良い。4端子回路は、インピーダンス (アドミッタンス) のネットワークと見ることができ、直流抵抗回路網と同様の合成解析ができる。端子対の仮定から、電流は対をなす端子間で還流する境界条件を与える。この時、回路の線形性より

$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} \equiv F \begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

と表すことができるはずである。この F は **4端子行列** と呼ばれるものの一種で、特に F 行列あるいはカスケード行列と呼ばれる。 A, B, C, D を4端子定数、あるいは F パラメタと呼ぶ。(2.38) はまた、次のように書くこともできる。

$$A = \left(\frac{V_{in}}{J_{out}} \right)_{J_{out}=0}, \quad B = \left(\frac{V_{in}}{V_{out}} \right)_{V_{out}=0}, \quad C = \left(\frac{J_{in}}{V_{out}} \right)_{J_{out}=0}, \quad D = \left(\frac{J_{in}}{J_{out}} \right)_{V_{out}=0}. \quad (2.39)$$

入力と出力を交替して、

$$\begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} \equiv K \begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

という書き方も可能である (K 行列)。

F 行列は入力と出力をつないでいるものの、因果律を表しているわけではない。また、状況により回路の記述に便利なパラメタは変化する。以下に、そのような様々なパラメタに対応する行列を示す。ただし、対称性のため、 J_{out} の向きを図2.5(b)のように F 行列とは反対にとる。

$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} \equiv Z \begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} \equiv Y \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Z をインピーダンス行列、 Y をアドミッタンス行列と呼ぶ。この他にもハイブリッド (h) 行列、散乱 (S) 行列など、良く使われるパラメタ行列がある。これらは、それぞれ、トランジスタ、高周波回路の項で改めて説明する。

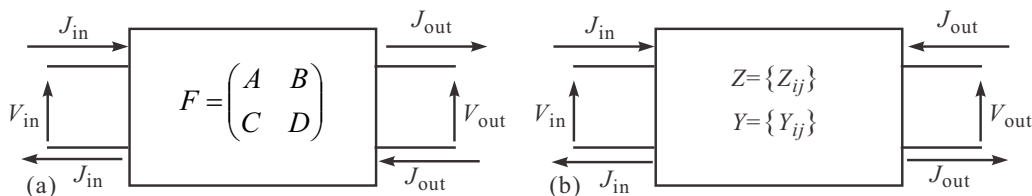


図2.5 (a)4端子回路の概念図。F行列に使う外部パラメタ。(b)インピーダンス行列、アドミッタンス行列のためには、外部電流の向きを対称に取る。

	A	B	C	D
直列素子	1	Z	0	1
並列素子	1	0	$\frac{1}{Z}$	1
T型	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$	$\frac{1}{Z_2}$	$1 + \frac{Z_3}{Z_2}$
π 型	$1 + \frac{Z_1}{Z_3}$	Z_1	$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3}$	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$

表 2.1 2 端子素子を接続して作った 4 端子回路と F 行列

2.4.2 4 端子回路の接続

図 2.6(a) のように 4 端子回路の出力を次の入力として次々と繋いでゆくことをカスケード接続と呼んでいる．全体の F 行列は簡単に

$$F_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^N F_i \quad (2.43)$$

となる．F 行列をカスケード行列と呼ぶ所以である．一方，2 端子回路の直列接続に相当するのは，電圧が加算されるような接続法であるから，図 2.6(b) のようになる．この時はインピーダンス行列を使うのが便利で合成回路のインピーダンス行列は $Z = Z_1 + Z_2$ と和で表される．同様に並列接続図 2.6(c) では，合成回路のアドミッタンス行列は $Y = Y_1 + Y_2$ となる．表 2.1 に 2 端子素子を接続して色々な 4 端子回路を形成した場合の F 行列についてまとめた．このような受動素子による 4 端子回路で，物理実験で良く使われるのが，フィルター回路である．例えば，T 型の回路で， Z_1, Z_3 にインダクタ， Z_2 にキャパシタを使えば，T 型ローパスフィルターとなる．

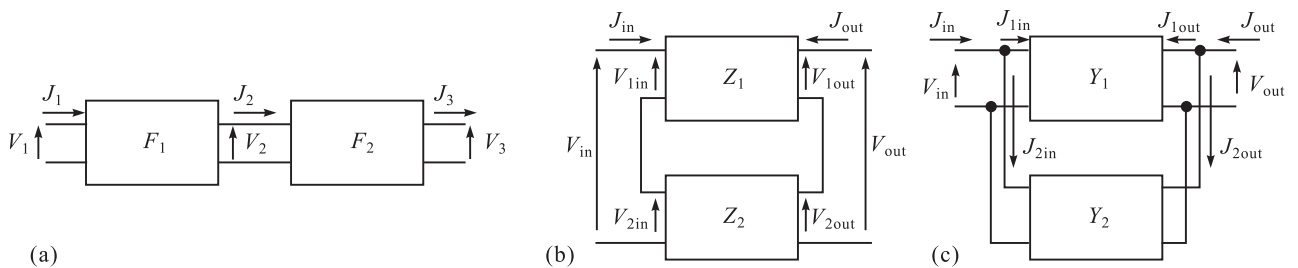


図 2.6 (a) 4 端子回路のカスケード接続. (b) 直列接続. (c) 並列接続

2.5 端子対回路の諸定理

「回路網」の項でいくつかの回路定理を紹介した。これらは、端子対回路という制約の下でも当然成立する。また、端子対回路特有の定理も存在する。

重ね合わせの定理

図 2.7(a) に示すように (この例は、4 端子回路ではなく 6 端子回路であるが)、電圧、または電流を決めている境界条件が複数あり、別の端子対に負荷を接続した場合、負荷に流れる電流は、それぞれの電源の「出力値」をゼロにした時の値の和となる。

鳳-テブナンの定理

6 端子回路で見ると、図 2.7(b) のようになる。すなわち、6 端子回路に電源が 2 つ、インピーダンス Z が接続されている時、 Z に流れる電流 J は、 Z を開放した時に生じる電圧を V_o 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピーダンスを Z_i とし、 $J = V_o / (Z + Z_i)$ と書くことができる。

ノートの定理

鳳-テブナンの定理のアドミッタンス版。図 2.8 のように、鳳-テブナンでインピーダンスと見たところをアドミッタンス Y と考え、 Y の両端に現れる電圧 V を求める。まず、 Y を短絡して流れる電流 J_s を測定する。次に、 Y を開放して電源の出力をいずれもゼロとし、出力側から測定したアドミッタンスを Y_i とすると、

$$V = \frac{J_s}{Y + Y_i} \quad (2.44)$$

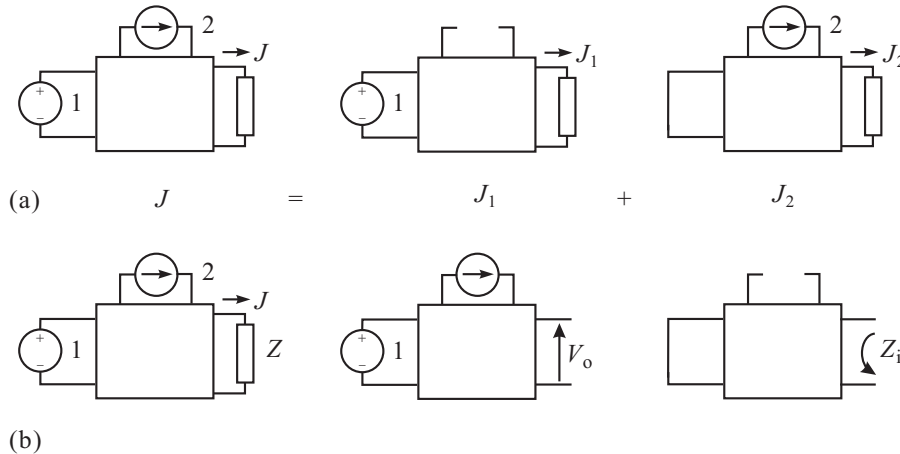


図 2.7 (a) 重ね合わせの定理. 左側の回路で右の抵抗器を流れる電流 J は、右辺第 1 項、定電流電源をオープンにした場合に流れる電流 J_1 と、第 2 項、定電圧電源をショートした時に流れる電流 J_2 との和である。(b) 鳳-テブナンの定理. インピーダンス Z に流れる電流 J は、 Z を開放した時に生じる電圧を V_o 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピーダンスを Z_i とし、 $J = V_o / (Z + Z_i)$ 。

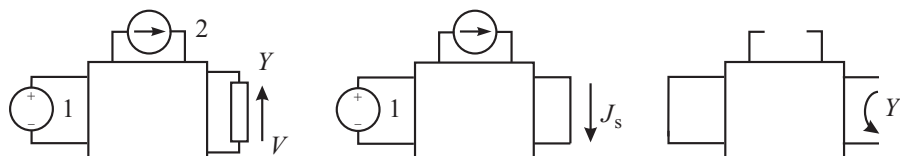


図 2.8 ノートの定理. アドミッタンス Y に生じる電圧 V は、 Y を短絡した時に流れる電流を J_s 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したアドミッタンスを Y_i とし、 $V = J_s / (Y + Y_i)$ 。

である。

補償の定理

これも鳳-テブナンの定理の言い換えである。やはり、電源がつながった回路の中のインピーダンス Z を考える。左図の状態で電流 J が流れていたとする。インピーダンスが ΔZ だけ変化し、中央図のように、これを補償する電源 ΔV をつないで、 J が変化しないように調整する。 $\Delta V = J\Delta Z$ である。次に右図のように電源の出力を例によってゼロにし、更に上記補償電源の向きを逆転する。この時、各導線に流れる電流 ΔJ_i は変化 ΔZ による電流変化を抽出したものである。

これは、中央の図と右の図を「重ね合わせ」で見れば明らかである。

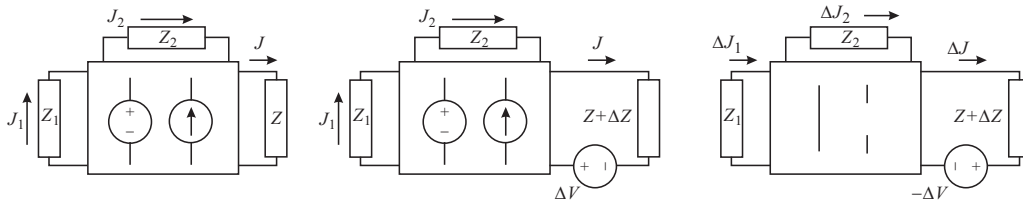


図 2.9 補償の定理. 本文参照.

相反定理

4 端子回路における相反定理は物理的には様々な表現ができる。以下、2 種類紹介する。ここでは例によって直流の線形素子 (起電力, 抵抗) による回路網に話を限るが、交流の場合もキルヒホッフの法則同様、複素数への拡張によって同様な定理が成立する。4 端子回路, 相反定理をめぐる, 様々な物理の結びつきが [1] に紹介されている。

相反定理 (コンダクタンス): 4 端子回路の入力, 出力は便宜的な区別に過ぎないので, これを a, b と称する。a に起電力 V をつなぎ, b を短絡した時に, b に流れる電流は, 逆に b に V をつないで a を短絡した時に a に流れる電流に等しい。これは, アドミッタンス (今の場合コンダクタンス) 行列で $Y_{12} = Y_{21}$ となっていることを示している。

相反定理 2(抵抗): a に定電流源 J をつなぎ, b を開放した時に, b に発生する電圧は, 逆に b に J をつないで a を開放した時に a に発生する電圧に等しい。これは, インピーダンス (今の場合抵抗) 行列で $Z_{21} = Z_{12}$ となっていることを示している。

以上から, 相反定理が成り立つ場合には, F, Z, Y の各行列の要素間に

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C}, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} \quad (2.45)$$

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}, \quad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B} \quad (2.46)$$

という関係が成立する。また, これより

$$|F| = AD - BC = 1 \quad (2.47)$$

であることもわかる。

2.6 双対性

これまで調べてきた回路の性質に現れた**双対性** (duality) について見ておこう。これは, インピーダンスとアドミッタンスのようにある種の対立概念がある時, 対立概念のセットを入れ替え, 場合によっては概念間の論理関係も入れ替えるなどの操作 (双対変換 duality transformation) を行うことで, 対応定理が成立するとき, 2 組の概念セットの間に双対性がある, というものである。これら概念セットのことを双対空間 (dual space) と呼ぶことがある。2 つの空間の間に双対性があれば, 一方の空間で成立する様々な定理・性質は双対変換によって双対空間でも成立することになる。

直列接続	並列接続
開放	短絡
電場	磁場
キルヒホッフの第 2 法則	キルヒホッフの第 1 法則
電圧	電流
インピーダンス	アドミッタンス
抵抗	コンダクタンス
静電容量	インダクタンス
鳳-テブナンの定理	ノートンの定理

表 2.2 電子回路基礎概念間の双対性の例.

表 2.2 に、これまでに現れた電子回路に関する双対関係にある基礎概念の例を示した。前回の講義でメタな関係を共有する物理系間の平行論 (parallelism) について簡単に述べたが、平行論においては関係する系の間に直接の物理的な関係はなかったのに対し、双対関係は一般に密接な物理関係を有する点が大きな違いである。多くは双対変換が逆数や積分の逆変換となるなど、対極的な関係にある。

付録 A：物理実験のための「電源」の雑知識

物理実験で電源の知識は欠かすことができない。電子回路論講義中では、2 端子素子としてカプセル化されている (ここでは、後述する制御電源 (controlled power) は除外する) が、ここで付録として電源の実用知識を簡単につけておこう。電源だけでも広大な知識分野であり、これは実験室でのサバイバル・メモ、というところである。電源の中から、発電所、変電所を経て実験室の配電盤から供給される交流電源、ここから回路による変換を経ての直流安定化電源、これらに比べて電極電位独立性の高い化学電池、について簡単に見ていくことにする。

交流供給電源

発電所や変電所については省略する。代表的な交流供給方式 3 種類を、図 2.10 に挙げた。実験室の配電盤を見ると、日本の場合多くは単相 2 線式、および三相 3 線式の端子とブレーカーが組み合わされている。

単相 2 線式 (single-phase two wire system) は、日本国内での電灯線に最も良く使用されている方法で、一方 (中性線) がほぼ接地電位であり、もう一方が交流電圧を担っている。接地電位側にも電流が流れるので機器類の筐体 (case あるいは シャーシ (chassis)), などと接触させると過熱・発火の原因となる。日本の電灯線コネクタ (コンセント) では、ほとんどの機器では挿す方向が決まらず、逆挿しをしても機器の動作上問題ないように作られている。一応、コンセントの細長い穴を見ると、2 つの穴で長さが異なっており、長い方が接地電位と決められている。このため、オス側のコネクタも電極幅を広くして逆挿しができないようになっているものもある。また、きちんとした接地電位を取るために接地端子を設けて向きを決定する場合も多い。が、これも、延長ケーブルなどによって反転してしまうこともあり、また、電気工事の際のミスによって反転して接続されている場合もある。どちらが接地電位なのか知りたい場合、検電ドライバーなどが便利で、ドライバーの先を穴に挿入すると (金属部分をつかむと感電の危険がある)、接地電位でない方でネオン管や LED が点灯するようになっている。

単相 3 線式 (single-phase three wire system) は、米国や、日本でもエアコンや炊事用ヒーターなど大きな電力を要する機器への電力供給に良く使用される方式である。ほぼ接地電位のラインと別に逆位相で交流を供給する 2 本のラインを使用する。逆位相の交流ライン 2 本を接続することで、対地電圧の 2 倍の振幅の電圧を供給することができる。米国製あるいは米国向けの計測機器はこの交流供給方式を前提としているものが多く、日本向けの機器と混在させて使用する場合、接地電位の取り方に注意を要する。電源トランスの容量結合などによって筐体に交流が乗ってビリビリと感電することもある (出力抵抗が大きいため事故になるような大きな電流が流れることはまずない)。

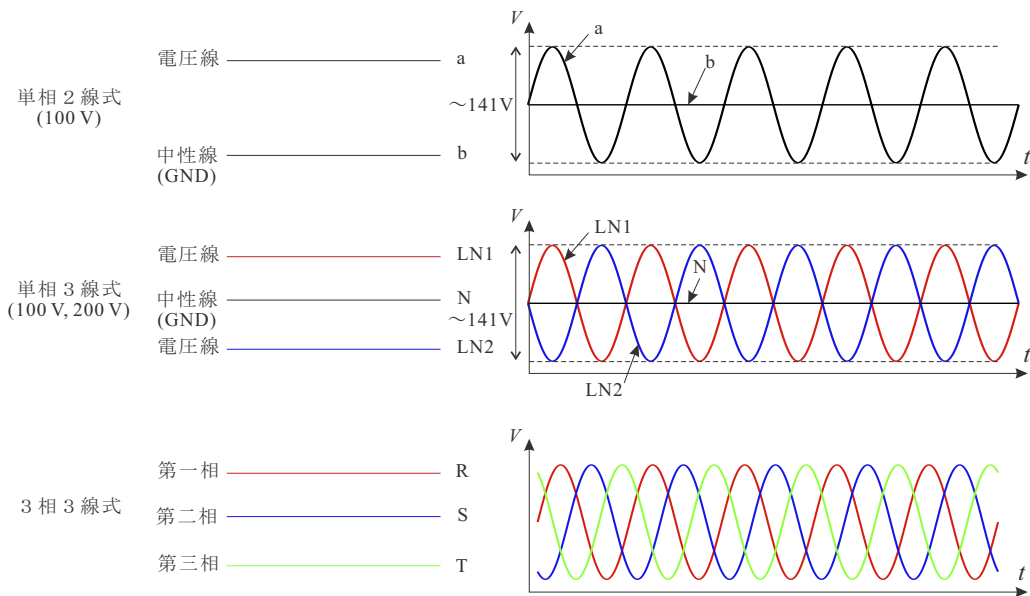


図 2.10 代表的な交流電源供給方式. 各方式での各線の電位時間変化を模式的に右の図に示した. ただし, 特に三相交流の場合, 結線法により対地電位の時間変化は大きく異なる. 図は, 相対的に 120° ずれていることがわかりやすいよう, スター結線と呼ばれる結線方式の場合の電位変化を描いている.

三相 3 線式 (three-phase three wire system) も, 少ない導線リソースで大きな電力を供給するために使用され, モーターなど動力関係で特に多用される. この供給方式は 2 端子ではなく 3 端子であるから, 本文中での交流電源や消費電力の記述に修正が必要となる. 図 2.10 のように, 3 本のラインに $2\pi/3 = 120^\circ$ づつ位相のずれた交流が乗せられている. 三相交流の接続法にはスター結線, デルタ結線など色々があるが, とにかくこの 3 つの相にそれぞれ同じインピーダンスが接続されているとすると, 各線に流れる電流を合計するとゼロとなる. すなわち, 電流を供給源に還流させるためのラインは必要ないことになり, 単純に 2 本ずつの線を使って 3 つのインピーダンスに電力供給した場合に比べて線は半分で済んでしまうことになる. もちろん, 電流が還流していないわけではなく, それぞれのインピーダンスを流れる電流が他の電流とうまくシンクロナイズして流れることで余計な線を用意しなくて済んでいる, ということである.

三相用に設計されたモーターでは, R, S, T の位相を設計通りに接続しないと, 逆回転したり正常に回転しないことが多いので注意が必要である. また, 結線法によって接地電位位置が異なり, これも注意しないと漏電を生じることがある. また, 高い電圧の単相交流がほしくて 3 線の内 2 線を使う場合, 上の話からもわかるように, 「戻り電流ゼロ」の条件が満たされなくなり漏電と同じ状態になることもあるのでこれも要注意である.

直流安定化電源

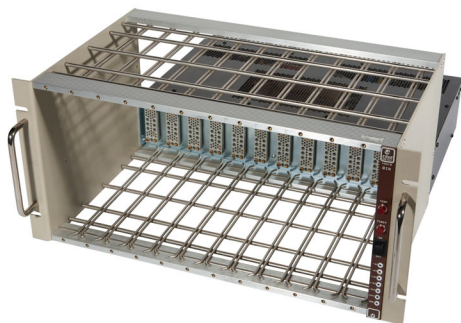


図 2.11 電源ビンの例。パルス NMR 実験用規格品。背面より $\pm 6\text{ V}$, $\pm 12\text{ V}$, $\pm 24\text{ V}$, AC 100V が供給される。

能動素子を用いる際は、直流電源が必要になる場合が多く、かつては良く自作していたが最近は手軽な市販の電源を揃えて接続することが多くなった。高エネルギー実験など、パルスラインに多数の小さな機器を接続してデータ収集系を構成する必要のある実験では、個別の電源を揃えたり結線したりに膨大な手間を必要とするため、かなり以前より、図 2.11 にあるような、19 インチ標準実験用ラックに電源端子が並んだ電源ビン (bin with power supply) が多用されてきた。これは、19 インチラックに規格レールを張り、押し込んだところで後方からの電源端子に接続されるように設計されたもので、電源の乱雑な配線を一気に整理し使いやすくした仕様である。電源の質などは別として方式としては、物性実験などにも広まってよいものだと考える。

直流安定化電源はドロップ型とスイッチング電源の 2 方式が主である。

ドロップ型

リニア方式、シリーズ方式などとも称する。まず、図 2.12 左のように、トランスを用いて電源電圧を望みの電圧近くに下げる。ダイオードブリッジを通すことで、交流は極性を保って振動する脈流に変化し、これをインダクタとキャパシタを用いたローパスフィルタに通すことで、非安定化直流とする。

「非安定化」というのは、図のようにローパスフィルタを抜けたリップルが含まれていることと、接続する負荷によって電源電圧が変動することを指している。これらを解決して常に既定の低揺らぎ直流電圧を得るために図 2.12 右のようなドロップ型レギュレータ IC を用いる。内部等価回路の説明は、現時点での読者の程度をやや超えるので略す。

ドロップ型は高い電圧から低い電圧を得る際に大きな電力損失を生じるため、次に述べるスイッチング電源に比べて変換効率は良いとは言えない。また電源トランスを用いるため重く大きくなるのが欠点である。が、揺らぎが小さく高周波雑音も少なく発振しにくい、物理実験のためには好適な電源と言える。

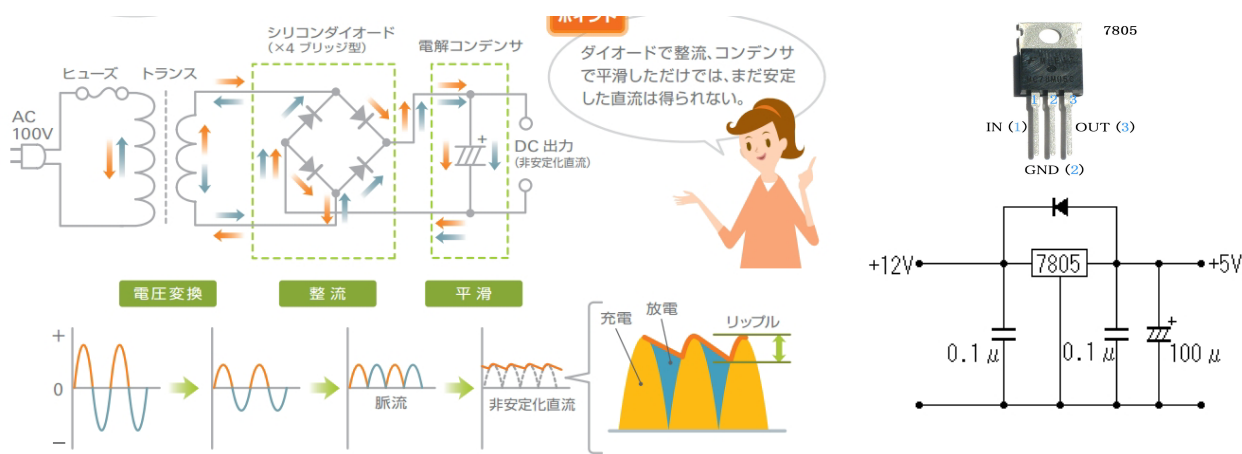


図 2.12 左はドロップ型の直流電源の入力となる非安定化電源の概念図。右上はシリーズレギュレータ IC のひとつ、7805 型。右下は、これを用いた安定化電源の回路図。TDK web <http://www.tdk.co.jp/techmag/power/200807/> より。

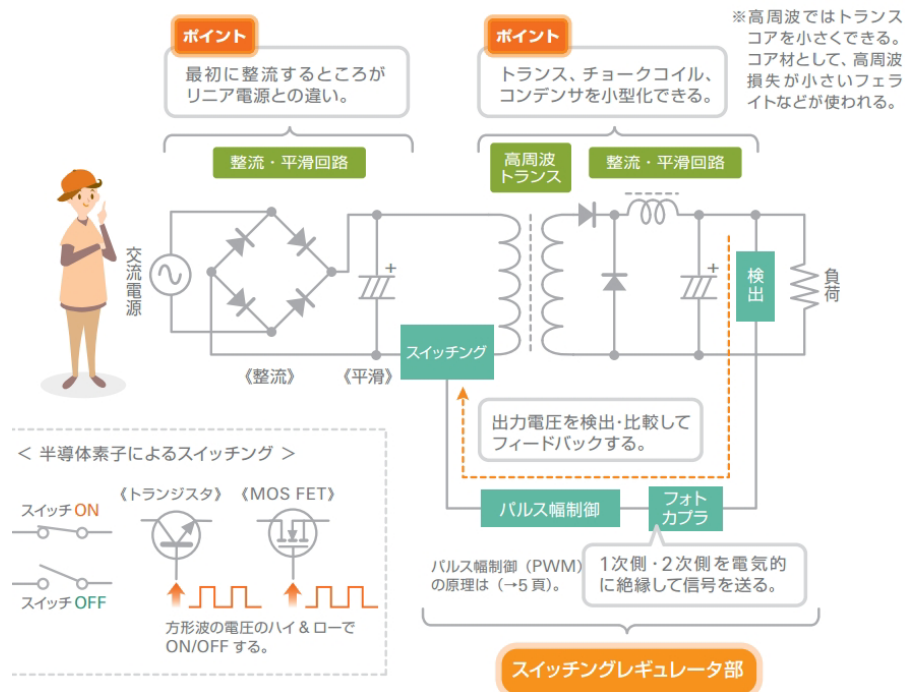


図 2.13 スイッチング電源の概念図。トランスへの入力をパルス化して、時間平均化した出力が規定値になるようにフィードバックをかける。TDK web <http://www.tdk.co.jp/techmag/power/200807/> より。

スイッチング電源

スイッチング電源の概念図を図 2.13 に示す。入力をトランスを介さずいきなり整流して非安定化直流電源とする。これを MOS FET などのスイッチ素子を使って細切れにしてパルス列とし、トランスなどを介して高周波とし再び平滑化して直流を得る。

このような一見面倒な手間を介する理由は、スイッチ素子を使って細切れにする制御が大変やりやすく、MOS FET などは ON/OFF の抵抗比が大変大きくパルス列変換の際の電力ロスが小さい点にある。すなわち、出力を監視して規定値と比較し、規定値とのずれをなくすようにパルスのデューティ比 (ON 時間が全体に占める割合) をフィードバックをかける。トランスは高周波用であるため鉄心などを用いて大きなインダクタンスを用意する必要がなく、軽量コンパクトで高効率に作るができる。また、出力電圧もわずかな変更で自在に得ることができる。

欠点は何と言ってもスイッチすることで非常に高い周波数のスイッチングノイズが発生して出力に混入することである。また、フィードバックを通して発振することもあり、容量性やインダクタンスの大きな負荷に給電する際には注意が必要である。

化学電池

以上のような配電盤から供給される電力を用いた直流安定化電源は、シャーシが接地電位となることを前提に設計されている。出力電位には多少の余裕を持たせてはあるものの、負極は電源トランス等の容量結合を通じて接地電位につながっているため、例えば正極を接地電位につないで +15 V を出力すると、負極に -15 V が出力される、ということはない。

これに対して、フロート性が高いのが化学電池であり、比較的自由的な電位位置で所望の電圧を得ることができる。電極での化学反応によって発電するので、平滑化やスイッチングなどによるノイズが少なく高品質の電源となる一方、長時間出力は安定しているとは言えない。また、出力抵抗が大きく大きな電流を取り出そうとすると内部電力損失が大きくなる。これは、電圧標準として用いる標準電池などでも同じであり、参照電圧として使用する場合には注

意を要する。かつては、水銀電池の電圧安定度が高く、簡便な標準として使用されたが環境問題のため使用が禁止されている。

参考文献

- [1] 高橋秀俊, 藤村靖, 「高橋秀俊の物理学講義——物理学汎論 (ちくま学芸文庫)」 (筑摩書房, 2011).