

「電子回路論」最終レポート解答例

勝本信吾

2017年2月27日

来年度は他の先生が講義することになり来年度のレポート問題の心配をしなくても良くなったので、ここで解答例を公開する。言うまでもなく「例」に過ぎず、これ以外にも当然様々な解き方や解答がある。

1 DA 変換回路

1.1 抵抗ラダー型 DA 変換回路

講義で説明したものと端の様子が少しだけ変わっていて、講義の説明をそのまま使うことはできない。

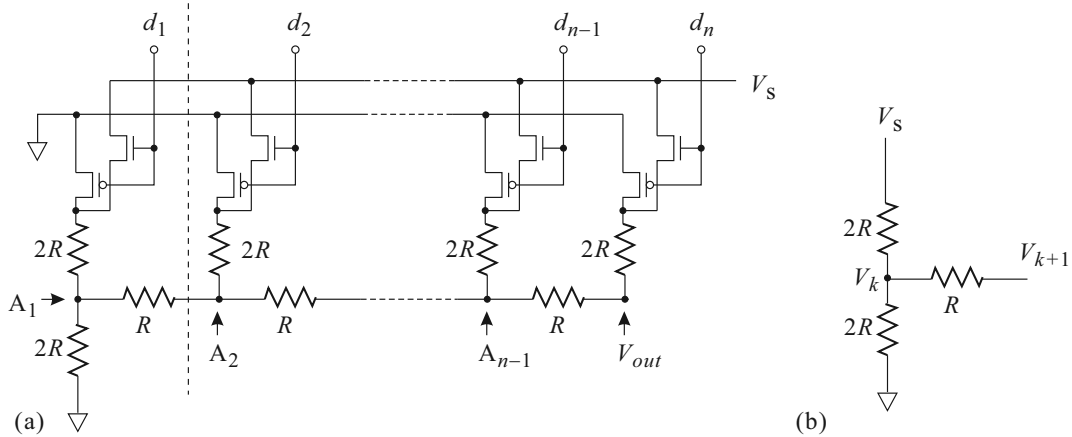


図1 (a) 出力端を高入力インピーダンスアンプで取る形の抵抗ラダー型 DA 変換回路. (b) $d_k = 1, d_{l \neq k} = 0$ の場合の結節点 A_k 付近の等価回路.

まず、「分岐点から左側を見たときの抵抗値」に関しては状況は講義で説明したものと同じである。すなわち、図1(a)で点 A_2 から左を見ると、 d_1 が接地の状態を考えると、MOS スイッチにより A_1 から上に伸びる抵抗 $2R$ も接地されるから、接地までの合成抵抗値は $2R$ となる。これは、 $d_k = 0 (k < i)$ であれば、点 A_i について同様である。

次に点 $A_i (1 < i < n)$ の電圧を V_i と書き、点 A_i にキルヒホッフの法則を適用すると、

$$(V_i - V_{i+1})/R + (V_i - V_{i-1})/R + (V_i - V_s d_i)/2R = 0 \quad (1)$$

である。 $d_i = 0$ の場合、 $2V_{i+1} - 5V_i + 2V_{i-1} = 0$ となり、特性方程式 $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2) = 0$ が解 $x = 1/2, 2$ を持つことから、漸化式を $2V_{i+1} - V_i = a_0 2^i$ 、 $V_{i+1} - 2V_i = b_0 2^{-i}$ と分解することができる (a_0, b_0 は定数)。結局 $D_1 = a_0/3$ 、 $D_2 = -2b_0/3$ を定数として

$$V_i = D_1 2^i + D_2 2^{-i} \quad (2)$$

という形の解が得られる。

そこで、 $d_k = 1, d_{l \neq k} = 0$ という状況を考え、端の状況 (境界条件) から D_1, D_2 (これらは無論、 n, k に依存) を定める。まず、右端の状況から、 $V_{out} = V_n = (2/3)V_{n-1}$ である。この式に (2) を代入することで、関係式

$$D_2 = D_1 2^{2n+1} \quad (3)$$

が得られる。次に、 $i = k$ の状況 (図 1(b)) を考えると、点 A_k でのキルヒホッフの法則より

$$(V_s - V_k)/(2R) - V_k/(2R) - (V_k - V_{k+1})/R = 0, \\ \therefore D_2 = \frac{V_s 2^k}{3} \quad (4)$$

となる。(3), (4) より $D_1 = (V_s/3)2^{k-2n-1}$ となり、これらを (2) へ代入することにより、この時の V_{out} として、

$$V_{out} = V_n = \frac{V_s}{3} 2^{k-2n-1} 2^n + \frac{V_s}{3} 2^k 2^{-n} = \frac{V_s}{2} 2^{k-n} \quad (5)$$

が得られる。

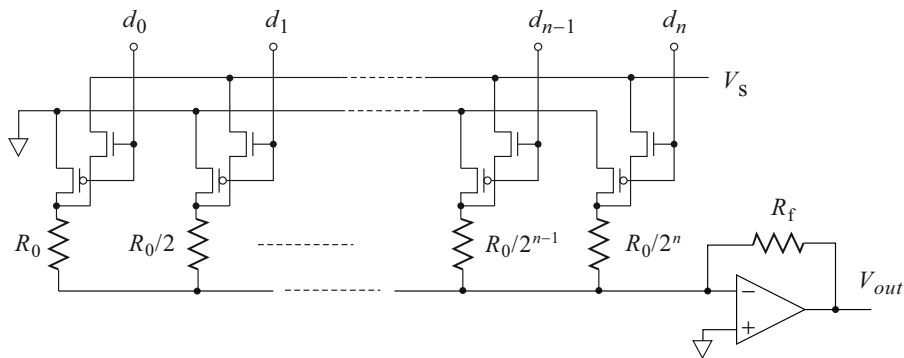
以上から、重ね合わせの定理を用い、一般の $\{d_k\}$ について

$$V_{out} = \frac{V_s}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n d_k 2^k \quad (6)$$

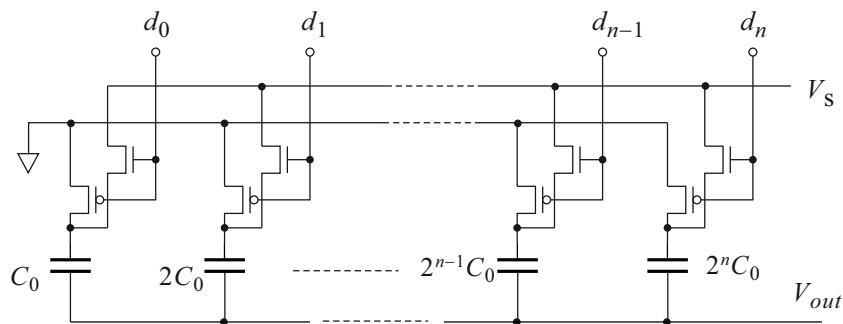
という DA 変換出力が得られることがわかる。

1.2 2進数抵抗値抵抗列型 DA 変換回路

$R_0/2^k$ ($k = 0, \dots, n$) という抵抗値の抵抗器を持っていれば、これで電圧源 V_s とグラウンドを結んだ際に流れる電流は $(V/R_0)2^k$ となるから、OP アンプで電流加算器を構成すれば容易に題意を達成することができる。



1.3 2進数容量列型 DA 変換回路



問題文に間違いがあり、 $\{2^k C_0\}$ ($k = 0, \dots, n$) の「抵抗値列」ではなく、「容量列」でなければならなかった。選択して下さった方は皆「容量 (キャパシタンス) 列」と読みかえていただき、感謝したい。また一部の方の解答に「もう 1 個の C_0 が必要」というコメントを付けたが、これは、出力電極電荷の安定化とサンプルアンドホールドのために必要なもので問題を解く限りにおいては必要ない。もちろん、採点にはこの点は影響ないのでご安心を。

問題の中身としては、1.2 と同様、容量 $2^k C_0$ のキャパシタに電圧 V_s を加えたときの総電荷を測定するようにすればよく容易である。上図の回路で k 番目のキャパシタに溜まった電荷は、 $(V_{\text{out}} - d_k V_s) 2^k C_0$ であるから、出力電極の全電荷を 0 に維持すれば、

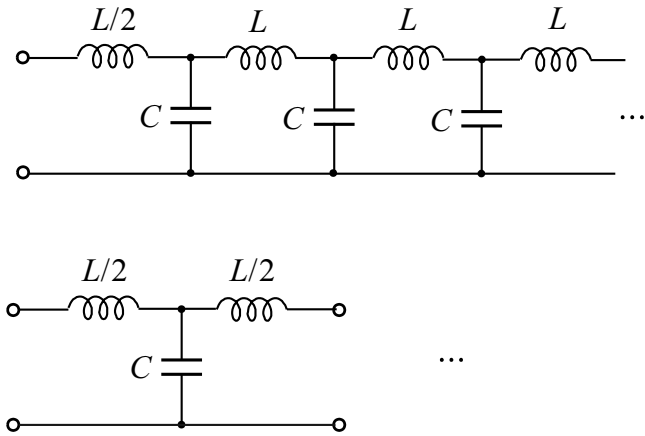
$$\sum_{k=0}^n (V_{\text{out}} - d_k V_s) 2^k C_0 = 0. \quad (7)$$

これより、題意のとおり、

$$V_{\text{out}} = \frac{V_s}{2^{n+1} - 1} \sum_{k=0}^n d_k 2^k \quad (8)$$

が得られる。現実には、正確で安定な電気容量のキャパシタを何桁もの範囲で揃えることはかなり難しいと考えられ、これを実用化した例は講師は知らないが、実用化するとすれば、先にも述べた安定化キャパシタや電荷の放電スイッチなど様々な付加回路が必要になると考えられる。

2 分布定数回路



「分布定数回路」というタイトルを付けたが、これは細分化極限を取っていないので、「繰り返し回路」、「周期回路」などと名付けるのがより正確であった。繰り返しの単位をどう取るかで無数の解き方があり得る。と言っても、繰り返し回路の一般的性質により、どう取っても周波数特性などは繰り返し単位と同じになる。

左図のように、この半無限回路をインダクタ $L/2$ を 2 つとキャパシタ C を 1 つの T 型回路の半無限繰り返しと考える。1 つの T 型回路は F 行列

$$F(\omega) = \begin{pmatrix} i\omega L \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right) & 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \\ 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} & i\omega C \end{pmatrix} \quad (9)$$

で表される。これを n 個つないだ回路の F 行列は $F_n(\omega) = F^n(\omega)$ である。

今、 $F(\omega)$ の固有値を $q_{\pm}(\omega)$ とすると、これらを要素とする対角行列を G として、ユニタリー行列 U により $F = U^{-1} G U$ とすることができる。これによって

$$F_n(\omega) = U^{-1} G U U^{-1} G U \cdots U^{-1} G U = U^{-1} G^n U = U^{-1} \begin{pmatrix} q_+^n(\omega) & 0 \\ 0 & q_-^n(\omega) \end{pmatrix} U \quad (10)$$

と書ける。実際に $q_{\pm}(\omega)$ を求めると

$$q_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \pm \sqrt{\omega^2 LC \left(\frac{\omega^2 LC}{4} - 1 \right)} \quad (11)$$

である。ここで、平方根の中が負、すなわち

$$\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (12)$$

であれば、

$$|q_{\pm}| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right)^2 - \omega^2 LC \left(\frac{\omega^2 LC}{4} - 1\right)} = 1, \quad (13)$$

すなわち、この場合は式 (10) で $n \rightarrow \infty$ としても、回路中を進む電流電圧は進行につれて位相が回転するだけで振幅を保つ。したがって、式 (12) が透過域を表し、 $\omega > 2/\sqrt{LC}$ が減衰域である。 $2/\sqrt{LC}$ が遮断周波数である。

以上は、影像パラメタで考えても同じである。今、影像インピーダンスは

$$Z_1 = Z_2^{-1} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right)}, \quad (14)$$

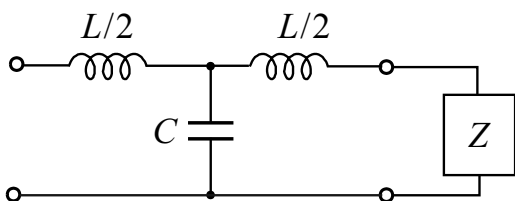
で、 n 個繰り返し回路の F 行列は、講義ノート式 (3.30) の表現と双曲線関数の性質を用いると

$$F(\omega)^n = \begin{pmatrix} \cosh n\theta & Z_1 \sinh n\theta \\ Z_1^{-1} \sinh n\theta & \cosh n\theta \end{pmatrix} \quad (15)$$

と書くことができるから、結局透過域は、1 個の回路と同じで、その影像減衰定数がゼロの領域である。その条件は、

$$1 = \left| \frac{V_1 J_1}{V_2 J_2} \right| \Leftrightarrow 1 = \sqrt{\left| \frac{V_1 J_1}{V_2 J_2} \right|^2} = \left| \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \right| = \left| 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega^2 LC}{4} - 1\right) \omega^2 LC} \right|$$

で、これは、(11)~(13) と同じである。



次に、左から見た 2 端子インピーダンスであるが、F 行列が (15) のように求まっているので、影像インピーダンス (14) そのものである。あるいは次のように求めることもできる。繰り返し数 $n \rightarrow \infty$ の極限を取った値を求めるため、インピーダンス Z は、それ自身に左図のように 1 個のユニットを付け加えたものと同じになるはずである。すなわち

$$Z = i\omega \frac{L}{2} + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L/2 + Z}}. \quad (16)$$

これを Z について解けば

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - \omega^2 \frac{LC}{4}\right)} \quad (17)$$

となって、やはり影像インピーダンスを与える。一部の方の解答へのコメントに、「端の影響で虚部が出るはずである」と書いてしまったが、端のインピーダンスを L に取った時の話であり、「ヒント」と思って端を $L/2$ にしたため、上記のように、実部しかない。間違ったコメントを書いた方にはお詫びする。また、このことで減点はしていない (きちんと求まっている解答について) のでご安心を。上式からわかるように、遮断周波数でインピーダンスは 0 となり、共鳴が生じている。

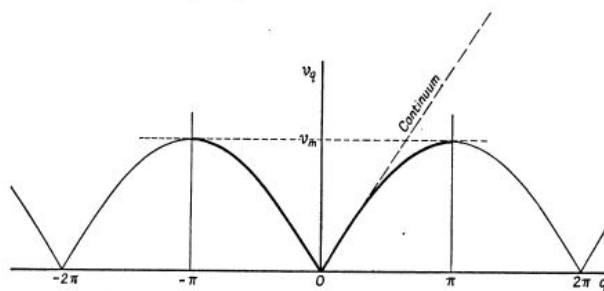
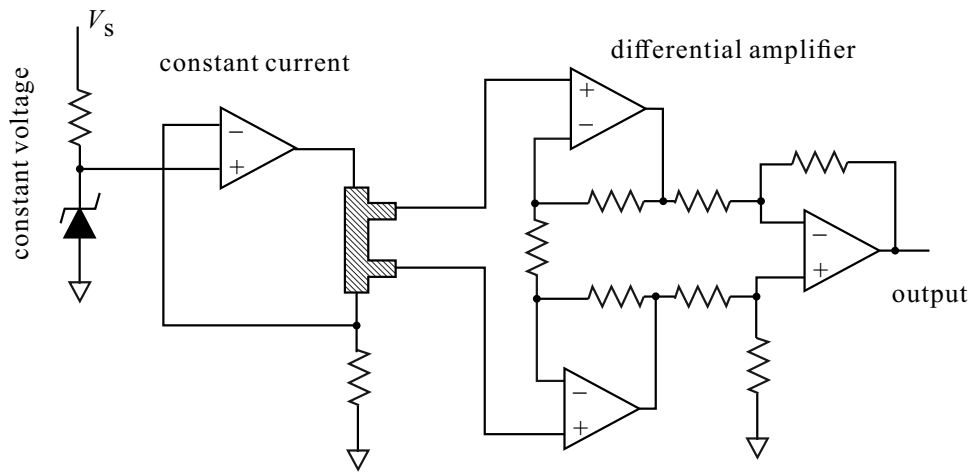


FIG. 2. Frequency versus wave number for a linear chain.

L と C の組み合わせは、繰り返し単位について無限小の極限を取った時には分布定数回路の伝送路となり、遮断周波数は存在しなかった。これは、 $L/C = Z_0^2$ を一定にして極限を取ったためで、遮断周波数 $2/\sqrt{LC}$ は発散する。このように、連続空間を離散化することで遮断周波数が生じる現象は色々存在する。例えば、上の図は Ziman の “Electrons and Phonons” から取った 1 次元格子の音響フォノンの分散関係である。周波数 (ν) ゼロ付近では分散がない、質量ゼロの伝播を示しているが、波数 q あるいは周波数が増えるに従い、上に凸のカーブを描いて、 ν_{th} が遮断周波数になっている。遮断周波数での波長は、ちょうど格子周期の倍になっており、フォノンと格子との間で一種の共鳴が生じている。連続体では図中に “Continuum” と書かれているように、遮断周波数、あるいは共鳴点は無限遠に逃げてしまう。

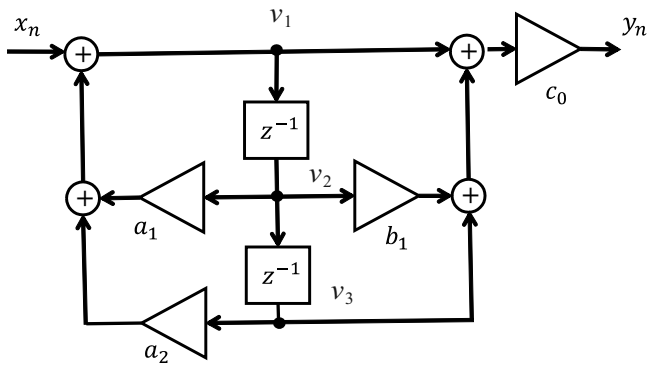
3 OP アンプ回路



上記が回路例である。ツェナーダイオードを用いて定電圧を作り出し、これを OP アンプを用いて定電流化している。結果として試料電位がグラウンドから浮いた状態になるため、差動アンプ (講義ではインストルメンテーションアンプ、として紹介) を用いて差動電圧を接地電圧に変換している。

低温測定などでは、配線に生じる熱起電力などをキャンセルするため、電流方向を変えたり、低周波でロックインアンプを用いて測定するなどの工夫が必要となる。

4 デジタルフィルター



4.1 入出力の関係

IIR フィルターで、ノッチを構成する有名な例。ダイアグラムを素直にフォローすれば良い。左図のように節点に $v_{1,2,3}$ と符号を付けると、

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 z^{-1}, \\ v_1 &= x_n + a_1 v_2 + a_2 v_3, \\ v_3 &= v_2 z^{-1}, \\ y_n &= c_0(v_1 + b_1 v_2 + v_3). \end{aligned} \quad (18)$$

上の3つの式から

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})v_1 = x_n \quad (19)$$

である。この形から (18), および $y_n z^{-k} = y_{n-k}$ を用いて、

$$\begin{aligned} y_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} &= c_0[(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})v_1 + b_1(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})v_1 z^{-1} + (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})v_1 z^{-2}] \\ &= c_0(x_n + b_1 x_{n-1} + x_{n-2}). \end{aligned} \quad (20)$$

これが求める関係式である。

4.2 周波数特性

(20) より,

$$y_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} = (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) y_n = c_0 (x_n + b_1 x_{n-1} + x_{n-2}) = c_0 (1 + b_1 z^{-1} + z^{-2}) x_n$$

であるから, 伝達関数 $H(z)$ は

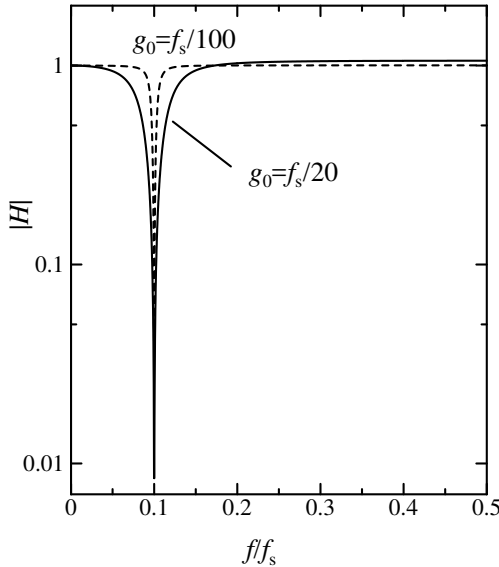
$$H(z) = \frac{c_0(1 + b_1 z^{-1} + z^{-2})}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (21)$$

である.

周波数依存性は, $z = e^{i\omega\tau}$ と置いて

$$|H(e^{i\omega\tau})| = \left| \frac{c_0(1 + b_1 e^{-i\omega\tau} + e^{-2i\omega\tau})}{1 - a_1 e^{-i\omega\tau} - a_2 e^{-2i\omega\tau}} \right| \quad (22)$$

から得られる. 何も考えずに Scilab のような便利なソフトでプログラムを組んで調べてみると, 左図の実線のように $f/f_s = 0.1$ で伝達関数の絶対値 (透過率, あるいは, そう呼びたければゲイン) にディップを持つような特性を示している. ノッチフィルター (notch filter) あるいはバンドストップフィルターと呼ばれる特性である. g_0 の値を $f_s/100$ に取ってみると, 破線で示したように同じ位置により幅の狭いディップを持っている. これより, g_0



がディップの幅, f_0 がディップ位置を指定していると予想される.

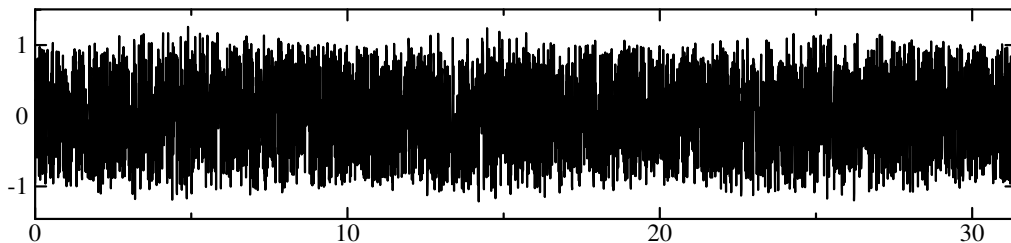
そこで, 式 (21), (22) を調べてみる. c_0 は関係式 $c_0 = (1 - a_1 - a_2)/(2 + b_1)$ より, $f = 0$ で $H = 1$ とするための規格化定数であることがわかる. 次に分子は, 記述の簡単のため, $2\pi f_0\tau$ などを f_0 などと書くと, $1 - (e^{if_0} + e^{-if_0})e^{-if} + e^{-2if} = (e^{-if} - e^{-if_0})(e^{-if} + e^{-if_0})$ となって, $f = f_0$ でゼロ点を持つことがわかる.

更に分母を調べると, $(e^{g_0/2-if} - e^{-if_0})(e^{g_0/2-if} + e^{-if_0})$ となり, $e^{g_0/2}$ が付いているため, 極を生じることはない. そこで, f_0 まわりの様子を見るために, $\Delta f \equiv f - f_0$ として, 上の積の中で異常を生じる $e^{g_0/2-if} - e^{-if_0}$ の項を調べる. $\Delta f \sim 0$ で, また, $g_0 \ll \pi$ とすると, $\Delta f, g_0$ の 1 次まで取り

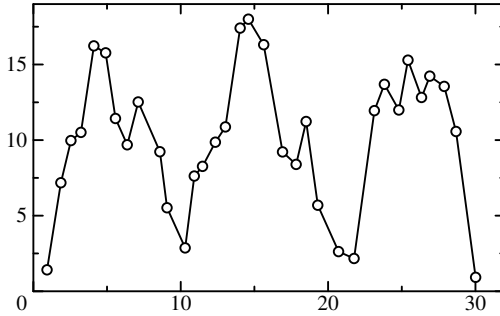
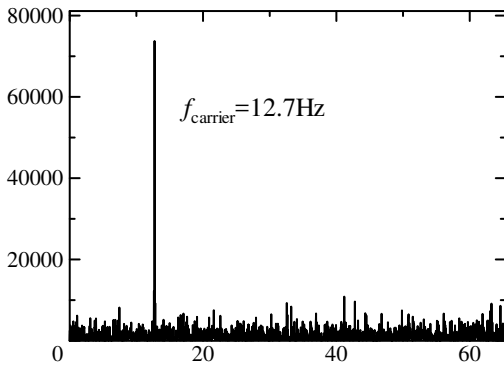
$$|e^{g_0/2-if} - e^{-if_0}| \sim |g_0/2 - i\Delta f| = \sqrt{(\Delta f)^2 + \left(\frac{g_0}{2}\right)^2}$$

であるから, 幅 g_0 程度のディップになることがわかり, 数値計算から帰納的に得られた結果が裏付けられた.

5 離散フーリエ変換

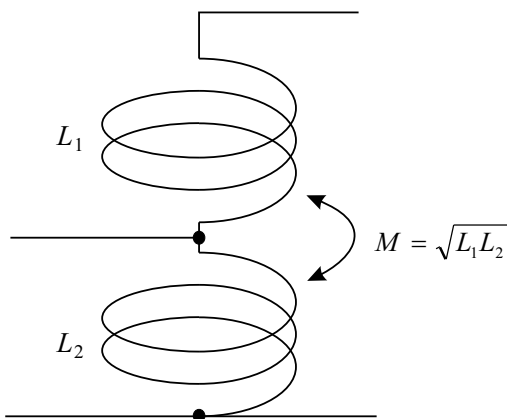


これは, サービス問題であり, 手間はかかるが (便利なデータ解析プログラムを所有していれば, その手間さえ大してかからない) 題意の通りに計算を進めれば解答を得ることができる. まず上が与えられた信号で, ホワイトノイズのように見える.



しかし、FFT にかけてみると上左図のようにパワースペクトルに明瞭なピーク構造があり、便宜的に与えられたデータの横軸を秒とすると、12.7Hz にキャリアが存在することがわかる。そこで、12.7Hz を中心としてウィンドウを開け、ある程度狭めた区間で FFT を行いながらウィンドウ内の振幅をウィンドウ中心位置に対してプロットすると、細かいパラメータによって多少の差は出るとは思うが、上右図のように 3 周期程度の三角波パターンが再現できるはずである。

6 インピーダンス整合



簡単な問題のつもりで出したのだが、意外に苦戦された方が多くて驚いたが、理由は「コイルに中間タップを出す」という状況をどう扱うか、ということの説明がなかったことであり、説明不足になってしまった点はお詫びする。インピーダンス整合のところ、マッチングトランスの方法を紹介したが、高周波ではコイルの巻き数も少なくなり、トランスではなくこの問題のように中間タップで済ませることも多い。多くの方が、中間タップでコイルを 2 つに分けて等価回路を考えておられたが、そのほとんどで「2 つに分けた」際にこれらのコイルが磁束を共有しているということが抜けてしまい、独立したコイルの直列回路として扱われていたため、複雑な計算にはまっていた。

図のように、2 つのコイルが磁束（鎖交磁束）を共有している場合、当然相互インダクタンス M を考える必要がある。磁束に一切の漏れがない（密結合）とすると、これら 2 つのコイルの単独でのインダクタンスをそれぞれ L_1 、 L_2 とすると $M = \sqrt{L_1 L_2}$ である。また、全体のインダクタンス L は

$$L = L_1 + L_2 + 2M = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2$$

である。そもそもこうなっていないと「インダクタンスが巻き数の 2 乗に比例」という単コイルの最も単純な（磁束が漏れない）理論が成立しなくなる。

で、タップ側と全コイル側との電圧（起電力）比は磁束が共有されていることからインダクタンス比 L_2/L になる。これは結局マッチングトランスと同じ状況であり、

$$\frac{L_2}{L} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{50}{800} = \frac{1}{16} \quad \therefore \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{4} = 0.250.$$

L と C の値に関しては、ほとんどの方が正解されていた。まず、先に共鳴幅から

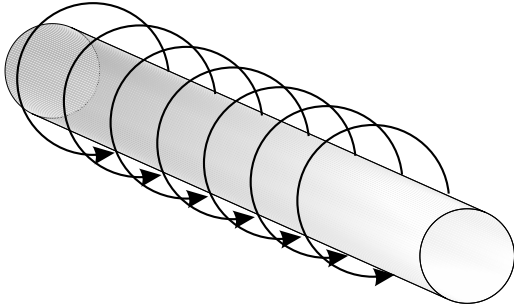
$$Q = \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{85}{10} \approx 2\pi \times 85 \times 10^6 \times 800 \times C$$

であるから、

$$C = 1.99 \times 10^{-11} \text{ F} = 19.9 \text{ pF}.$$

次に共鳴周波数条件から

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{1.99 \times 10^{-11} \times (2\pi \times 85 \times 10^6)^2} = 1.76 \times 10^{-7} \text{ H} = 0.176 \mu\text{H}.$$



ここでひとつ面白い問題は、「問題番号 2 ではインダクタンスをリニアに足したり分割したりしたのに、ここでは急に相互インダクタンスを考えたのはどうしたわけか?」ということであろう。これは、講義でも触れたように、問題 2 のような LC の組み合わせを繰り返し単位として伝送路を考えている時、電磁場が波動の進行方向に対して垂直な TEM モードを考えているためである。左図からもわかるように、TEM モードでは鎖交磁束はなく、相互インダクタンスを考える必要はない。これは、「電子回路」という近似であっても、実際に相手にしているのは電磁場であることを念頭に置いておかなければならない、という実例の 1 つと見る

ことができるだろう。