# 電子回路論 第 2 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2014 年 10 月 9 日

## 第 2 章 線形回路序論 2.1 線形システムと電子回路 (つづき)

### 前回のサマリー

**電子回路** (1)　物理学，更には 科学，工学，というものが何をやっているのか，メタなレベルで考えてみる機会を与えてくれる，不思議な分野である．

**電子回路** (2)　物性物理学，数理工学が連携してでき上がった巨大な分野である．物理の人間はこれに敬意を払いつつ，臆することなく自らの考察を行っていって良いと思う (講師の意見)

**回路図**　電磁場を人間が操作するための仕掛けである電子回路を，人間がデザインし，解析・理解する道具であり，他人に伝える言語である [1].

**受動 3 素子**　抵抗器，キャパシタ，インダクタ.

**系の応答**　不変性，因果性.

**線形システム**　重ね合わせの原理

**応答関数**　線形システムの応答を表す汎関数は周波数空間で応答関数の積で書ける.

**(補足) 重ね合わせの原理の連続形**

$$\mathscr{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} c(q)x(q,t)dq\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(q)\mathscr{R}\{x(q,t)\}dq$$

### 2.1.2　伝達関数 (続き)

前回は，たたみこみ (2.7) にフーリエ変換 (2.8) を施すことで，伝達関数を得た．これはある意味では，一定周波数 $\omega$ の入力に対する出力の性質を調べたもの，と考えることができる．この時は無限の過去から未来へ一定周波数で振動する入力を考える必要があった．フーリエ変換と類似の積分変換にラプラス (Laplace) 変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \tag{2.10}$$

が存在する．無限の過去ないし未来を考えると，関数自身が発散して手に負えないため，適当なカットオフを入れる必要があるが，今の場合どこに入れても同じなので，扱いやすい $t = 0$ に入れたものである．そこで同様に，入力 $u(t)$ として $t < 0$ でゼロであるもののみを考える．すると，(2.7) のたたみこみは，

$$w(t) = \int_0^{\infty} u(t')\xi(t-t')dt' \tag{2.11}$$

と書くことができる．$x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}\{x(t)\}$ のように表し，$W(s) = \mathscr{L}\{w(t)\}$，$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\}$，$\Xi(s) = \mathscr{L}\{\xi(t)\}$ とすると，(2.11) の両辺のラプラス変換を取って

$$W(s) = U(s)\Xi(s) \tag{2.12}$$

と，(2.9) と同型となる．この $\Xi(s)$ も伝達関数と呼ばれる．ラプラス変換は，フーリエ変換のような直交関数系展開係数の形をしていないので簡明な物理的意味付けができないが，インパルス入力に対して緩和 (減衰) 定数 $s$ (時定数 $s^{-1}$) で緩和する線形系での入力出力の関係を示していると見ることもできる．

更に，$s$ を複素平面へ拡張することを考え，$s \to \sigma + i\omega$ とする．$u(t)$ として $t \geq 0$ でのみゼロでないものを考えると，(2.12) の積分の下限を $-\infty$ に取っても発散することはなくなり，これを使うと，フーリエ変換 (2.8) も同形式になるため，「伝達関数」の表式として (2.12) を共通に使用することができる．特に周波数応答が欲しい場合は，$s = i\omega$ とすれば良い．以下，周波数応答であることを明示するためには，例えば $W(i\omega)$ のように書くことにする．

### 2.1.3 システムの電子回路表現とインピダンス

式 (1.4) を，$V_{12}$ を出力，$I_{12}$ を入力と考えて

$$w(t) = Ru(t), \quad w(t) = L\frac{du(t)}{dt}, \quad w(t) = \frac{1}{C}\int^t u(t')dt' \tag{2.13}$$

と書くことができる．すなわち，(1.4) の 3 つの受動素子は，このようなシステムの具体的な表現と考えることができる．これをこれらはこのようなシステムの**等価回路** (equivalent cirquit) である，と表現することがある．

(2.13) の 3 つの演算子，$R$，$L(d/dt)$，$(1/C)\int^t dt'$ は，(2.3)，(2.4) を満たしているから，これらは線形システムである．従って $s$-空間において，応答関数が定義できる．周波数応答を考えることにして $s = i\omega$ についてそれぞれ計算すると，

$$\text{抵抗器}: \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\left[R\delta(t)\right]dt = R, \tag{2.14a}$$

$$\text{インダクタ}: \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\left[L\frac{d}{dt}\delta(t)\right]dt = i\omega L, \tag{2.14b}$$

$$\text{キャパシタ}: \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{C}\int^t \delta(t')dt'\right]dt = \frac{1}{i\omega C}. \tag{2.14c}$$

(2.9) より，

$$W(i\omega) = RU(i\omega), \quad W(i\omega) = i\omega LU(i\omega), \quad W(i\omega) = \frac{1}{i\omega C}U(i\omega) \tag{2.15}$$

である．電圧，電流の関係に戻り，$I(i\omega) = \mathscr{F}\{I_{12}(t)\}$，$V(i\omega) = \mathscr{F}\{V_{12}(t)\}$ とすると，

$$V(i\omega) = Z(i\omega)I(i\omega), \tag{2.16}$$

と，オーム則 (Ohm's law) 形式になる．ただし，

$$\text{抵抗器}: Z(i\omega) = R, \tag{2.17a}$$

$$\text{キャパシタ}: Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C}, \tag{2.17b}$$

$$\text{インダクタ}: Z(i\omega) = i\omega L \tag{2.17c}$$

である．$Z(i\omega)$ を 2 端子素子の周波数 $\omega$ に対する**インピダンス** (impedance) と呼ぶ．インピダンスの逆数 $Y(i\omega) \equiv 1/Z(i\omega)$ を**アドミタンス** (admittance) と呼ぶ．

## 2.2 各種電源

(2.16) は，物理的には一定振幅の周波数 $\omega$ の電流 (電圧) を素子に加えた時，一定振幅の電圧 (電流) が発生する (流れる) ことを示している．「一定振幅，周波数 $\omega$ で振動する電流 (電圧) を素子に加える」のは，系の運動方程式の境界条件として与えられるものであるが，これを回路図という言語で表現する，また，実際の回路でこのような実験条件を作りだすのが**電源** (electric power source) あるいは**起電力** (electromotive force) と呼ばれる素子である．

「源」 (source) という表現からわかるように，電源からはエネルギーが回路に流入する．一方，抵抗器においてはエネルギーの散逸がある．

### 2.2.1　直流電圧源と電流源

キャパシタなどの場合と同様，理想的な電源 (ideal power source) を考え，これに非理想的な要因を回路素子として付け加えて現実の電源をシミュレートする．理想的電源の代表が，直流電圧源，電流源である．

理想直流電圧源は，どのような回路 (電源側から見た供給対象回路のことを，**負荷** (load) と呼ぶ) を接続しても一定電圧を保つ素子であり，現実の素子では電池がこれに近いものである．この，電池という素子から容易に思いつくように，これまで見てきた受動素子で直流電圧源を表現するとすれば，図 2.2(a) のように，１つのキャパシタで表される．ただし，

$$Q \to \infty, \quad C \to \infty, \quad V = \frac{Q}{C} = \text{const.}$$

のような極限操作を行ったものと考えることができる．回路記号的には，右のように電池として表される．

同様に，直流定電流源は図 2.2(b) のように，定電圧源に直列に抵抗器を挿入し，

$$V \to \infty, \quad R \to \infty, \quad I = \frac{V}{R} = \text{const.}$$

という極限操作を行ったものと考えられる．記号としては右に示したように，円に矢印で電流方向を示したものや，円を 2 つずらせて重ねたものが使用される．「円に矢印」記号は，交流定電流源の記号にも使用され，その性質は注釈等により規定する．

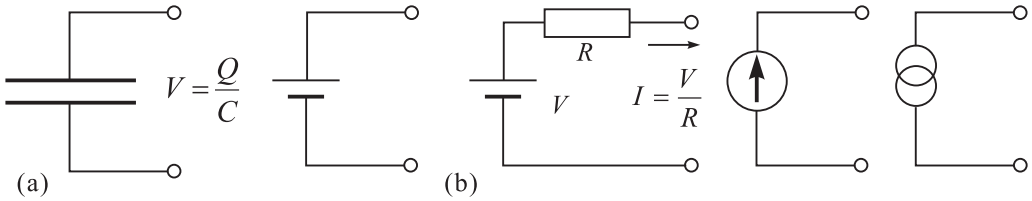



図 2.2　(a) 直流電圧源の等価回路，(b) 直流電流源の等価回路（いずれも極限操作に関しては，本文参照).

### 2.2.2　交流電源と制御電源

理想交流電圧源，電流源は，直流電源と同様，いかなる負荷に対しても一定の周波数 $\omega$，一定の電圧振幅あるいは，一定の電流振幅を維持する電源素子のことである．直流の場合と同様，受動素子に対して回路定数や境界条件に極限を取ることでの表現も可能であるが，後で練習問題に回すことにする．

更に，２端子素子ではないが，**制御電源** (controlled power source) と呼ばれるもの (概念) があり，これは，これまで述べてきた様々な電源の「定数」としてきた (例えば定電圧電源の電圧値などの) パラメタを外部から変更可能なものとし，その指定を入力電圧，電流などによってすることができる，としたものである．

その典型例を図 2.3 に示した．図中で使った円の中に波線を描いた記号は，交流電圧源の記号であるが，ここでは直流も含むことにする．いずれも入力パラメタの値に出力が比例する簡単なもので，(a) は 入力電圧に出力電圧が比例する電圧制御電圧源 (voltage controlled voltage source, VCVS)，(b) は入力電圧に出力電流が比例す

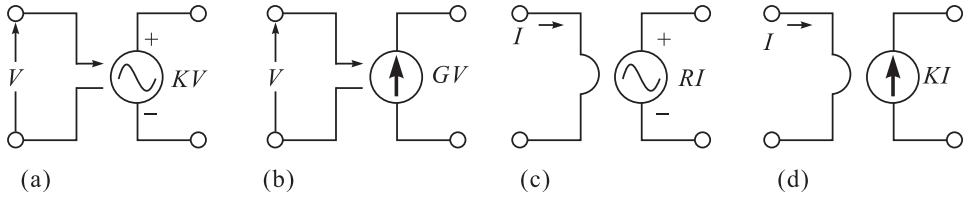



図 2.3　様々な制御電源の例．(a) 電圧制御電圧源 (VCVS)，(b) 電圧制御電流源 (VCCS)，(c) 電流制御電圧源 (CCVS)，(d) 電流制御電流源 (CCCS)

る電圧制御電流源 (voltage controlled current source, VCCS)，(c) は入力電流に出力電圧が比例する電流制御電圧源 (current controlled voltage source, CCVS)，(d) は入力電流に出力電流が比例する電流制御電流源 (current controlled current source, CCCS) である．

## 2.3 回路網

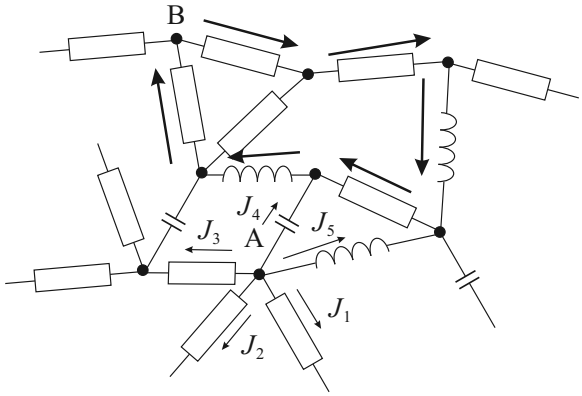



図 2.4　2 端子素子回路網の例

### 2.3.1 キルヒホッフの法則

周波数空間において定義したインピダンスについて，通常の抵抗器接続則と同様に扱うことができる．無論，周波数空間で (2.16) のようにオーム則形に書かれているためである．これら 2 端子素子を導線で結合した際に，電位の一価性と電荷保存則を，電子回路では**キルヒホッフの法則** (Kirchhoff's law) という．図 2.4 の A，B 点のように，複数の導線が結合している点を結節点と呼ぶ．任意の結節点から流れ出す電流を，$J_i$ とする．流れ込む電流は負の値で表す．すると，結節点上の電荷保存則より

$$\sum_i J_i = 0 \tag{2.18}$$

である (図では A 点で $J_1 \sim J_5$ で表示)．これはもちろん，電磁気学での連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{J} = 0$$

で，湧き出し/吸い込みがない場合 ($\partial\rho/\partial t = 0$) について，回路網であることからハード的に離散化されたものである．

また，各素子に番号をつけ，番号 $j$ の素子に印加されている電圧 (電圧降下) を $V_j$ と書き，図に示したように B 点を出発して矢印のように一周して B 点に戻る経路上でこれらを加えたとすると，電位の空間一価性より

$$\sum_j V_j = 0 \tag{2.19}$$

でなければならない．電子回路論では，(2.18)，(2.19) をそれぞれ**キルヒホッフの第１法則，第２法則** (あるいは，電流則，電圧則) と呼ぶ．

### 2.3.2 インピダンスの合成

キルヒホッフの法則より，アドミタンス (インピダンス)$Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ ($Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ ) の 2 端子素子を並列に並べた場合，その**合成アドミタンス** $Y_{\mathrm{tot}}$ (**合成インピダンス** $Z_{\mathrm{tot}}$) は

$$Y_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad Z_{\mathrm{tot}} = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i^{-1}\right)^{-1} \tag{2.20}$$

となることがわかる．同様に，直列接続の場合は

$$Y_{\mathrm{tot}} = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^{-1}\right)^{-1}, \qquad Z_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.21}$$

となる．

回路網が，起電力と線形な素子のみで出来上がっている場合は，すべての節 (node) と閉回路を考えてキルヒホッフの法則を適用して連立一次方程式が得られ，すべての枝を流れる電流を計算することができる．今，すべての枝を

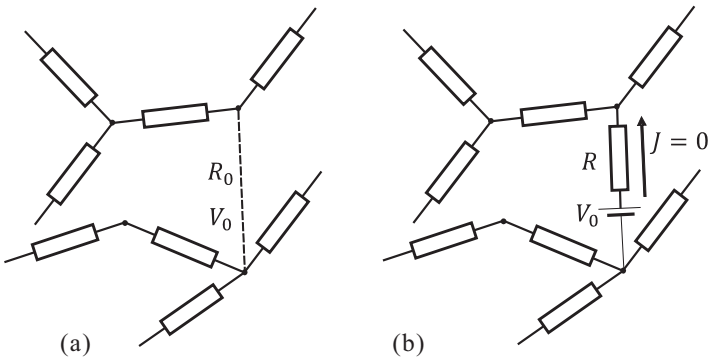



図 2.5　鳳-テブナンの定理の証明

起電力 $V_i$ $(i = 1 \ldots n)$ と抵抗 $R_i$ により構成されるとする (単なる直結の場合は $V_i = R_i = 0$)．すると，第 2 法則から，

$$A\{(R)\}\begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \qquad A \text{ は } \boldsymbol{R} \text{ の 1 次の行列}$$

である．電流分布 $\boldsymbol{J}$ は $A^{-1}\boldsymbol{V}$ から得られることになる．この線形性より次の 2 つの定理が容易に得られる．

**重ねあわせの定理**：回路網中に多くの起電力が存在する時の電流は，各起電力が単独に存在する時の電流分布を重ね合わせたものに等しい．(これは上記から明らかである．)

**鳳-テブナンの定理**：電流の流れている回路網内の任意の 2 点を，新たに抵抗 $R$ でつなぐ．つなぐ前の 2 点間の電圧を $V_0$，回路内の起電力をすべて短絡して 2 点間の抵抗を測定した時の値を $R_0$ とすると

$$J = V_0/(R + R_0) \tag{2.22}$$

となる．これは，起電力 $V_0$，内部抵抗 $R_0$ の電源に負荷抵抗 $R$ をつないだ時の電流である．これを特にテブナンの定理と呼んでいる．これは，重ねあわせの定理より次のように簡単に証明される．問題の 2 点間を $R$ と起電力 $V_0$ でつなぐ (図 2.5) と $R$ の両端の電圧は零であり，電流は流れない．この状態で，この $V_0$ 以外の回路網中の起電力をすべて零にすると，$V_0$ に対して $R$ と $R_0$ の直列回路がつながっていることになるので，流れる電流 $J_0$ は $-V_0/(R + R_0)$ である．重ねあわせの定理より，最初の「電流が流れない」条件は $J + J_0 = 0$ であることから，(2.22) が得られる．

この他にキルヒホッフの法則から導かれる重要な定理に，**相反定理** (可逆定理, reciprocity theorem) があるが，これは次の 4 端子回路で説明する．以上，特に直流回路網として説明してきたが，以上の法則・定理は電圧や電流を複素交流電圧/電流，抵抗を複素インピダンスなどと読み替えることによって，交流の場合にもそのまま成立する．

### 2.3.3　共鳴回路

左図のように，抵抗器，キャパシタ，インダクタを直列に接続した回路を考えると，電流は定常状態の時間積分という意味では共通であり，電圧は各素子にかかる電圧の合計であるから，この直列回路全体を 2 端子素子に見立てた合成インピダンス $Z_{\mathrm{tot}}$ は

$$V_{\mathrm{tot}}(i\omega) = V_R(i\omega) + V_C(i\omega) + V_L(i\omega) = Z_{\mathrm{tot}}(i\omega)I(i\omega),$$

$$V_R(i\omega) = RI(i\omega),\ \ V_C(i\omega) = \frac{I(i\omega)}{i\omega C},\ \ V_L(i\omega) = i\omega LI(i\omega)$$

より

$$Z_{\mathrm{tot}}(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + i\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \tag{2.23}$$

となる．ただし，

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.24}$$

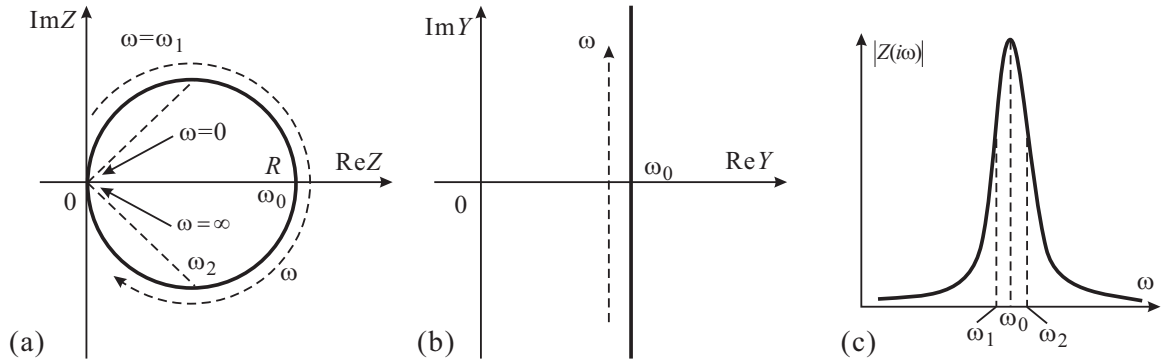
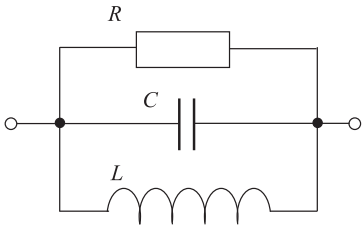



図 2.6　並列共鳴回路の (a) インピダンス $Z(i\omega)$，(b) アドミタンス $Y(i\omega)$ を複素平面上に，$\omega$ を $0 \to \infty$ に対する軌跡として描いた．共鳴点が $\omega_0$ であり，共鳴幅に相当する周波数が $\omega_1$，$\omega_2$ である．(c) インピダンスの絶対値の $\omega$ に対する変化.

は**共鳴周波数** (resonant frequendy) である．(2.23) は $\omega = 0$ で 1 次の極を持ち，$\omega = \omega_0$ で虚部がゼロになる．すなわち，$\omega = \omega_0$ の電流は $L$ と $C$ は全く存在しないかのように透過する．これが共鳴現象である．




同様に，左図のように並列接続した場合を考えると，今度は電圧が共通で，電流が全体の和になる．

$$I_{\mathrm{tot}}(\omega) = \frac{V(\omega)}{R} + i\omega C V(\omega) + \frac{V(\omega)}{i\omega L}.$$

従って合成インピダンスは

$$Z_{\mathrm{tot}}(\omega) = \left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]^{-1} \tag{2.25}$$

となる．

$\omega$ を変化させた時，$Z(i\omega)$ は図 2.6(a) のような円の上を移動する．これを **Q 円** (Q circle) と言う．アドミタンス $Y$ は図 2.6(b) のように実軸に垂直な直線上を動く．これに対してまた，$|Z(i\omega)|$ を $\omega$ に対してプロットすると，図 2.6(c) のような共鳴ピーク構造を示す．(2.25) の $|Z_{\mathrm{tot}}(i\omega)|^2$ の関数形の共鳴曲線を**ローレンツ型**の共鳴曲線 (Lorentzian) と称する．$Z$ の抵抗とリアクタンスの大きさが同じになる 2 つの点を $\omega_1$,$\omega_2$(図 2.6(a)) とするとき $|Z|$ がピーク値の $1/\sqrt{2}$ をとり，$|\omega_1 - \omega_2|$ を一般に**共鳴の幅**という．これと $\omega_0$ との比

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|} \approx \omega_0 CR \tag{2.26}$$

を共鳴の $Q$ 値 (quality factor, Q-value) といい，共鳴の鋭さを表す．$L$ と $C$ の並列回路は，電磁気エネルギーを相互にやり取りすることでエネルギーを蓄える働きがあるため，タンク回路と呼ばれている．この場合は，共鳴回路 (タンク) のリークを表す抵抗値 $R$ が大きいほど $Q$ が高い．これは，蓄えられたエネルギーのリークによる時定数が $CR$ であることから，量子力学のエネルギーと時間の不確定性と原理的には全く同じである．

より現実に近い共鳴回路モデルとして図 2.7(a) のようにインダクタに直列に抵抗が入った回路を考える．この場合は

$$Z(i\omega) = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR} = \frac{R + i\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\omega CR} \tag{2.27}$$

となり，$R$ がそれ程大きくなければ $\omega = \omega_0$ 付近で極大をとる．この回路の Q 値は

$$Q \approx \omega_0 \frac{L}{R} \tag{2.28}$$

となる．これは，やはり抵抗による時定数と共鳴の幅との不確定性を表している．

虚軸上の $Z(s)$ の様子を，その絶対値の対数と偏角を $\omega/2\pi$ の対数に対してプロットしたものを図 2.7(b) に示す．このような $\omega$ に対する伝達関数の log-log(虚数) プロットをボード線図とよぶ．

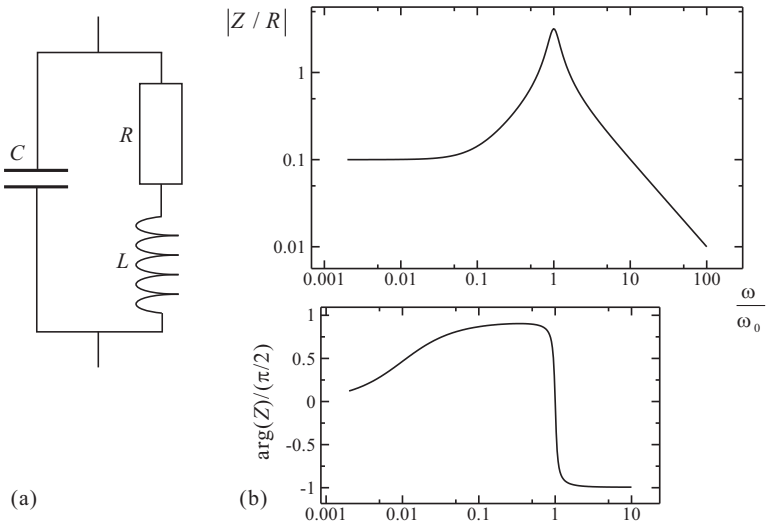



図 2.7　(a) エネルギー散逸のある並列共鳴回路．(b) (a) の回路の伝達関数を $\omega$ に対してプロットしたもの (ボード線図).

## 参考文献


[1] 講師の考えでは，言語というものはコミュニケーションばかりでなく，人間が「概念」と「論理」というメタ概念を形成していく上での欠くべからざる道具である．稀に，(多くは言語の獲得に問題のある障害を抱えるゆえに) 言語以外の方法でこれらを形成される方もいる [2].

[2] Temple Grandin "Thinking in Pictures, Expanded Edition: My Life with Autism" (Vintage, 2010).