

電子回路論 第 9 回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2014 年 11 月 27 日

前回のサマリー

分布定数回路 無限長導体系について，Maxwell 電磁場理論と同等な結果を与える表現法．

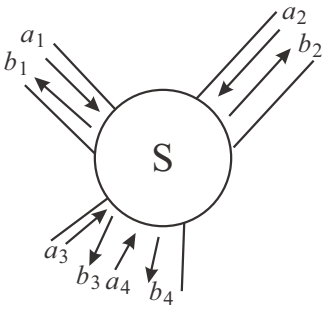
伝送線路の波動伝播 終端抵抗とインピーダンスマッチング．

スミスチャート 反射係数平面への終端インピーダンス写像．

第 4 章 過渡応答と分布定数回路 (続き)

4.4 S 行列 (S パラメタ)

4.4.1 S 行列の定義



集中定数回路では，導線は電位を瞬時に伝えたので，物理的な接触はすなわち完全な結合を意味したが，分布定数回路を必要とする高周波では，前節の議論の通り，結合に特別な扱いを必要とする．ここで，複数伝送路の結合について一般的な手法を考える．これまで，1つの伝送路に対して単一のモードのみ考えてきたが，一般に高周波伝送路では多数のモードが存在し，線形性からこれらのモードを通した伝送は線路内では互いに独立と考えることができる．そこで，各モードを (伝送) チャンネル (channel) と呼び，結合部を除いて独立とする．伝送チャンネルは，(4.9) の解として $\exp(\pm \kappa x)$ と，双方向に進むものがあったように，一般に双方向性である．これは，伝送路の反転対称性 (時間反転対称性) によるもので，外部磁場が印可されて時間反転対称性が破れている場合などは，注意が必要になる．

そこで，ある伝送路の結合点を考え，結合点に接続されている伝送チャンネルを i, j などで指数付けする．結合点への入力波動の各チャンネル複素振幅を a_i ，出力波動複素振幅を b_i として，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1i} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ S_{i1} & & S_{ii} & & S_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{ni} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

と書き， $\{S_{ij}\}$ を散乱行列あるいは S 行列 (S matrix) と呼ぶ．このように置ける，ということは，もちろん，結合点でのチャンネル間の結合が線形であることと同値である．「複素」振幅と断ったことからわかるように，S 行列では各波動の位相関係も含んで扱っており，当然 S 行列要素も一般には複素数である．

S 行列には，線形回路の対称性を反映した幾つの特徴がある．1つは，相反定理 (reciprocity theorem) と呼ばれ，

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad (4.43)$$

すなわち，対称行列である．また，波動が TEM モードで分散を持たず，結合経路も同じ媒質を使っている群速度が一定である場合，結合点での電磁エネルギー消失がないとすると，S 行列はユニタリー

$$\sum_j S_{ji} S_{jk}^* = \delta_{ik} \quad (4.44)$$

である．これは，エネルギー保存則から当然で，群速度が各チャンネルですべて同じであるから (流入エネルギー) = (流出エネルギー) より，

$$\sum_i |a_i|^2 = \sum_i |b_i|^2 \quad (4.45)$$

すなわち，S 行列はベクトルのノルムを保ち，ユニタリーである．

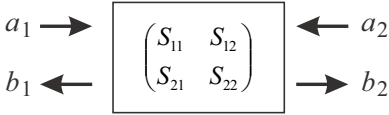


図 4.10 2 ポート S 行列

線路を通しての信号の伝送，反射などが重要になる高周波回路では，S 行列は頻用される．場合によっては増幅作用のある回路などにも使われ，このような場合は当然ユニタリー性 (4.44) は成り立たない．頻用されるため S 行列要素が S パラメタと呼ばれ，高周波回路での標準語彙となっている．左図の 2 ポート回路の場合，S パラメタ $\{S_{ij}\}$ は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

で定義される．1 本の伝送路には 2 本の導体線が必要であるから，2 ポート回路は 4 端子回路である．ただし，(4.46) のように書いた場合，S 行列は，4 端子回路を表した他の行列とは，1 つのポートを双方向伝送路として各方向の散乱に行列要素をそれぞれ充てている点が明瞭に異なっているので注意が必要である．

S パラメタの利点は，容易に測定できることで，ネットワークアナライザのような専用機器を用いれば，瞬時に正確な値を得ることができる．S パラメタから各種特性量を計算することができる．例えば特性インピーダンス Z_0 が既知であれば，負荷インピーダンス Z_L は $r = S_{11}$ より (4.37) を使って容易に求められる．より簡単には S_{11} をスミス・チャートにプロットすれば良い．S パラメタを例えば Z で表すと，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} (Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21} & 2Z_0Z_{12} \\ 2Z_0Z_{21} & (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

4.4.2 量子輸送と S 行列

S 行列の記述対象は，ごく一般的に伝送路を伝播する波動の結節点であった．量子力学に従い，物質中を伝播する電子も波動と考えることができ，いわゆる量子輸送現象論は電子が量子力学的な波動及び粒子としての伝播現象を対象とする．従って，量子輸送現象も伝送路と S 行列による記述が可能であり，散乱形式論 (scattering theory) と呼ばれている．S 行列を議論したついでに，その導入部を紹介する．

散乱形式論の基礎になるのは，量子細線 (quantum wire) の電気伝導である．量子細線とは，空間ポテンシャルの閉じ込め効果を用いて，ある 1 次元方向以外の運動の自由度を量子化によって凍結した電子の伝導路である．このような「伝導路」を伝導チャネル (conductance channel) と呼ぶ．電子回路と同様に，各チャネルは時間反転対称性のある系では双方向性であり，その電気伝導度は

$$G_q = \frac{2e^2}{h} \quad (4.48)$$

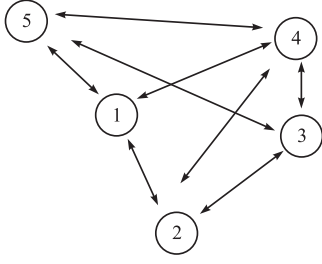
とユニバーサルな定数で表される．式 (4.48) は，電子スピンの自由度 2 を考慮しており，これを「別チャネル」と考える場合は $G_q = e^2/h$ となる．(4.48)，あるいはこの $1/2$ の e^2/h を伝導度量子 (conductance quantum) と呼ぶ．

量子力学において「粒子 (波動) の流れ」は，実空間座標表示の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ に対して確率密度流

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \quad (4.49)$$

で与えられる．しかし，これは，すでに期待値であり，これを直接扱う理論形式は量子輸送に現れる干渉効果などの量子効果を記述することができない．そこで，空間存在確率密度に対数する実空間波動関数に対応する複素確率密度

流を考える．これは，絶対値の 2 乗を取れば確率密度流になり波動関数の位相情報を保存するもので，最も単純には波動関数 ψ が表す粒子の群速度を v_g と置いて， $\sqrt{v_g} \psi$ とすれば良い．ある結節点に流れこむ複素確率密度流を $\{a_i\}$ ，流れでる方を $\{b_i\}$ と書けば，(4.42) の定義式をそのまま使用して S 行列による記述が可能である．



量子輸送に対する S 行列においては，時間反転対称性のある系では，(4.43) の相反定理 (Onsager 相反性)，(4.44) のユニタリ - 性のいずれもが成立する．散乱形式論での量子伝導体の記述は，左図のように S 行列で記述される結節点が幾つかあり，その間を双方向性の伝導チャンネルが結んでいる，というものである．この伝導チャンネルは量子細線内の量子化準位に相当する 1 次元伝導路で定義したが，これを広げて，例えば，ファインマン経路積分の古典経路に相当するものとも考えることも可能である．この定義は，任意の 3 次元導体であってもこのような伝導チャンネルの重ね合わせとして記述可能であることを示している．

4.4.3 S 行列の接続

量子伝導体のこのような記述法を考えると，複数の S 行列を接続したものを更に 1 つの S 行列と見ることが可能で，また重要であることがわかる．最も簡単なものとして，図 4.10 の 2 ポート S 行列を考える．まず，このような S 行列は，結節点での複素反射係数，透過係数を用いて，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_L & t_R \\ t_L & r_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

ここで， $t_{L,R}$ ， $r_{L,R}$ はそれぞれ左，右からの複素透過率・反射率であり，透過率・反射率 $T_{L,R}$ ， $R_{L,R}$ との関係は

$$T_{L,R} = |t_{L,R}|^2 = 1 - R_{L,R} = 1 - |r_{L,R}|^2 \quad (4.51)$$

である．最終的に，透過率が求まれば，これに (4.48) の伝導度量子を乗じたものが伝導体全体の電気伝導度となる．

導体 A，B を S 行列で表し，左図のように接続する．接続条件は

$$a_2 = b_3, \quad a_3 = b_2 \quad (4.52)$$

であるから，S 行列の要素に A，B の上付きを付けて区別し，この A，B 合わせた直列伝導体を 1 つの S 行列で表すと

$$\mathbf{S}_{AB} = \begin{pmatrix} r_L^{AB} & t_R^{AB} \\ t_L^{AB} & r_R^{AB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_L^A + t_R^A r_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} t_L^A & t_R^A (I - r_L^B r_R^A)^{-1} t_R^B \\ t_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} t_L^A & r_R^B + t_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} r_R^A t_R^B \end{bmatrix}$$

となる．以上， t ， r などは，スカラーとしてきたが，チャンネルが左右複数ある場合でも，これらをチャンネルを指数とする行列に変えれば上の扱いはそのまま成立する．行列 t を伝導体の透過行列， r を反射行列と呼ぶ．

4.4.4 T 行列

入射チャンネルを出射チャンネルへ変換した S 行列に対して，T 行列は，図 4.11(a) のように，左端子の入出力を右端子の入出力へと変換する行列であり，

$$\mathbf{M}_T \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

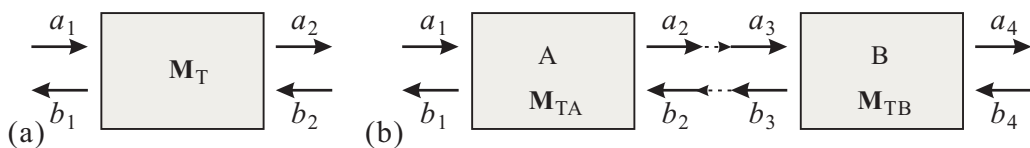


図 4.11 (a) T 行列の概念図．(b) T 行列の合成．

と定義される．図 4.11(b) からわかるように

$$\mathbf{M}_T^{\text{AB}} = \mathbf{M}_T^{\text{B}} \mathbf{M}_T^{\text{A}} \quad (4.53)$$

と，合成は行列の積で表されるので極めて容易である．一方， \mathbf{T} 行列を複素反射係数，透過係数で表すと

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix}$$

となり， \mathbf{S} 行列の方が見通しが良い．また，3 端子以上の分岐を扱うと，(4.53) の利点は失われる．以上の特徴から，問題に応じて \mathbf{S} 行列， \mathbf{T} 行列が選択される．

4.4.5 高周波デバイスの \mathbf{S} パラメタ表示

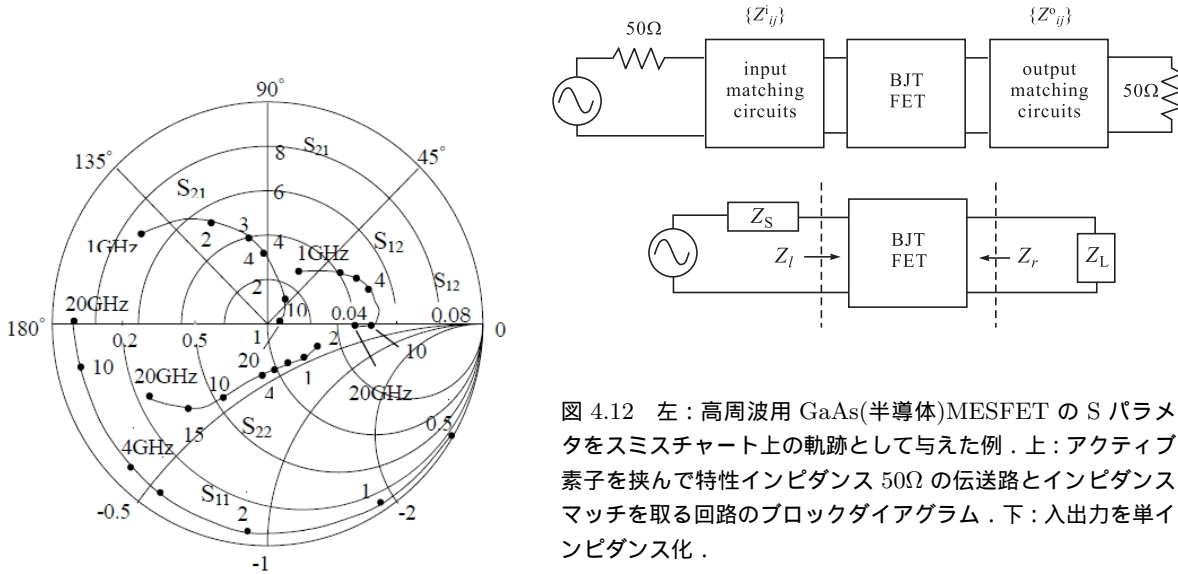


図 4.12 左：高周波用 GaAs(半導体)MESFET の \mathbf{S} パラメタをスミスチャート上の軌跡として与えた例．上：アクティブ素子を挟んで特性インピーダンス 50Ω の伝送路とインピーダンスマッチを取る回路のブロックダイアグラム．下：入出力を単インピーダンス化．

高周波用バイポーラ接合トランジスタ (BJT) や金属-半導体ショットキー電場効果トランジスタ (MESFET) など，高周波増幅デバイスの用途としては，図 4.12 上図のように，伝送線路からの信号を受けて何らかの増幅動作を行い，負荷の伝送線路へ信号を送り出すこと，と考えてよい．図では，高周波で頻用される特性インピーダンス 50Ω のラインを仮定している．また，個別デバイスを 3.4, 3.5 節で見たように，適当なバイアスを与えて線形 4 端子回路として扱う．このような高周波用途の増幅デバイスは，図 4.12 左図のように周波数特性を \mathbf{S} パラメタの形にまとめて，スミス・チャート上に与えていることが多い^{*1}．この例を見てもわかるように，個別デバイスは 50Ω に調整されているわけではなく（現実問題，負荷回路なしで（すなわち IC 化することなく）これまで見た半導体デバイスを 50Ω に調整することは困難である），2.9 節で見たように，何らかの外部負荷回路によってインピーダンス整合を取る必要がある．この時，高周波ではインピーダンスの周波数依存性が大きく，必要な中心周波数，バンド幅更にはノイズ特性も考慮して周辺回路を決定する必要がある．ここでは，考える中心周波数でのインピーダンス整合を中心に考える．なお，信号論については次章で扱う予定である．

図 4.12 上の回路は，鳳テブナンの定理を使うことで，図 4.12 下の回路へと等価回路変換することができる．注意すべきことは，回路は BJT(FET) 部分によって回路が分断されているわけではない，ということで，左右独立にチューニングを行うと整合が取れていない可能性が高い^{*2}．

まず，図 4.12 下のブロック図で，トランジスタ領域左右の信号源，および負荷のインピーダンスは

$$Z_S = Z_{22}^i - \frac{Z_{12}^i Z_{21}^i}{50 + Z_{11}^i}, \quad Z_L = Z_{11}^o - \frac{Z_{12}^o Z_{21}^o}{50 + Z_{22}^o} \quad (4.54)$$

^{*1} 通常，規格表には測定値の数表も同時に示されている．

^{*2} BJT や FET を直列接続（カスコード接続，cascode connection）することで，接続インピーダンスを高くし，ミラー効果を下げて左右の独立性を上げ，個別のチューニングを可能にすることも行われている．

と計算される．次に，これらと，トランジスタを Z パラメタ (インピダンス行列) で表したものの $\{Z_{ij}\}$ を使って，図 4.12 下で，信号源側からトランジスタ側を見た時のインピダンス Z_l と，負荷側からトランジスタ側を見た時のインピダンス Z_r は

$$Z_l = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}, \quad Z_r = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_S + Z_{11}} \quad (4.55)$$

と表される．形式的には，(4.54) と (4.55) をマッチさせれば良い．

4.4.6 S パラメタを用いたインピダンス整合 [1]

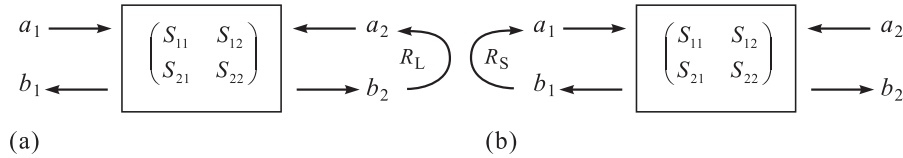


図 4.13 S 行列系へ反射負荷を接続する．(a) ロード側に反射係数 R_L の負荷を接続した場合．(b) ソース側に反射係数 R_S の負荷を接続した場合．

同じことを，S パラメタを用いて行うことを考える．トランジスタ系が 2 ポート S 行列 $\{S_{ij}\}$ で (4.46) のように表されているとする．図 4.13 のように，(a) ロード側に反射係数 $R_L = a_2/b_2$ の負荷を接続した場合，(b) ソース側に反射係数 $R_S = a_1/b_1$ の負荷を接続した場合をそれぞれ考える．(a) の場合，左から見た反射係数 $R_{in} = b_1/a_1$ は

$$R_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}R_L}{1 - S_{22}R_L} \quad (4.56a)$$

となる．同様に，(b) の場合，右から見た反射係数は，

$$R_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}R_S}{1 - S_{11}R_S} \quad (4.56b)$$

となる．

今，(a)，(b) の接続を同時に行い，入出力のインピダンスが整合しているとする．4.4.1 節で，Z 行列が S 行列を用いて容易に表せる，と述べたように，反射係数も整合しているはずである．ただし，信号の向きが逆であるから，互いに複素共役になっているはずである．

$$R_L = R_{out}^*, \quad R_S = R_{in}^*. \quad (4.57)$$

これを解いて，

$$R_S = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|M|^2}}{2M}, \quad R_L = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|N|^2}}{2N}. \quad (4.58)$$

ただし，

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad B_2 = 1 - |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad (4.58a)$$

$$N = S_{22} - S_{11}^* \det S, \quad M = S_{11} - S_{22}^* \det S \quad (4.58b)$$

である．この時の電力利得 (最大有能電力利得, maximum available power gain) は

$$G_{max} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| (K - \sqrt{K^2 - 1}) \quad (4.59)$$

となる．ただし， K は安定度係数 (stability factor) と呼ばれ，

$$K = \frac{1 + |\det S|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}S_{21}|} \quad (4.60)$$

であり，増幅が安定であるための条件は， $K \geq 1$ である．

参考文献

- [1] 市川古都美, 市川裕一「高周波回路設計のための S パラメータ詳解」(CQ 出版社, 2007) .
- [2] 北野正雄「量子力学の基礎」(共立出版, 2010) でも同じことをしている .
- [3] 勝本信吾「メゾスコピック系」(朝倉書店, 2002), 「半導体量子輸送物性」(培風館, 2014) .
- [4] 勝本信吾「量子の匠」(丸善, 2014) .

付録 D : スミスチャートによるインピダンス整合

スミスチャートを使ったインピダンス整合は, 直感が働きやすく, かつて現場で適当に集中定数素子を挿入して整合させていた際は良く使用されていた . また, 周波数の範囲をある程度取る必要がある場合に, どのように整合から外れていくかを見るにも良いと考えられていた . 現在では現場でスミスチャートを使用することはほとんどないと思うが, 高周波回路の学習の際に何が起きているのか視覚に訴える効果などは現在でも重視され, 回路の教科書などには生き残っている .

図 4.14 は, 単純なインピダンス (アドミタンス) で終端した場合の整合を取る作業を示したものであるが, 多くはこのような, 集中定数回路素子を直列/並列に挿入して反射係数ゼロの, 円の中心付近へ向けて移動する作業である . 異なる方法としては, 例えば, 特性インピダンスの異なる伝送線を挿入する, などもある . この場合は, これらのいずれでもなく円の中心を中心として回転する (したがってこの作業だけでは反射は低減しない) .

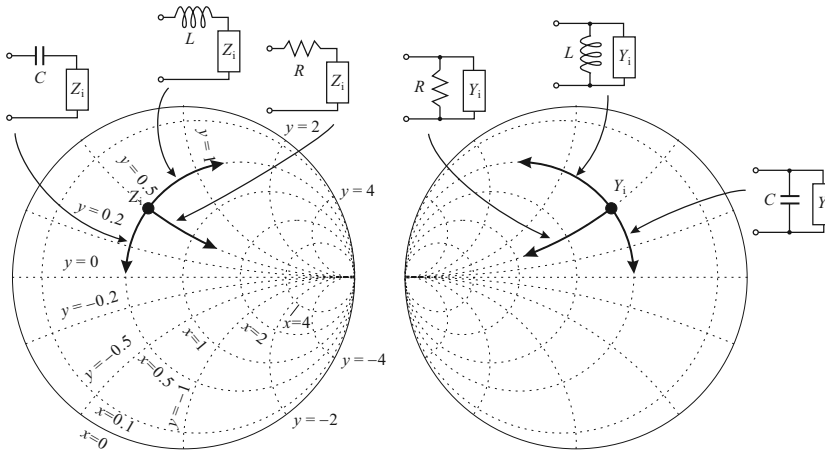


図 4.14 左: 負荷抵抗 Z_L を伝送路にマッチさせるために, 直列に抵抗, リアクタンスを挿入した場合, スミスチャート上で, それぞれ定リアクタンス円, 定抵抗円上を動かすため, これを使って原点 (反射ゼロ) 付近へ移動させる . 右: 並列に挿入する場合は, アドミタンスチャートで考え, やはり定サセプタンス (リアクタンスの逆数) 円, 定コンダクタンス円上を動かす .

付録 E : T 行列を使った 2 重障壁量子井戸の透過率計算 [4]

まず, 単一ポテンシャル障壁図 4.15 の左側) の T 行列を求める . ここでは波数 k を固定した単チャネルを考えるため, $A_1(k)$ 等は波動関数そのものという最初の定義を使用する . 障壁内の波動関数を $V_i(\kappa) + W_i(\kappa)$ と置く . V, W はそれぞれ $e^{-\kappa x}, e^{\kappa x}$ に対応し, $\partial V_i/\partial x = -\kappa V_i, \partial W_i/\partial x = \kappa W_i$ である . また, 添え字の i は上と同様, 空間位置を表し, 1, 2 を障壁の左右端に取ると

$$V_2 = V_1 e^{-\kappa L}, \quad W_2 = W_1 e^{\kappa L}$$

となる . これを用いて, 境界 1, 2 での接続条件を書き下ろすと, $\partial A_{1,2}/\partial x = ik A_{1,2}, \partial B_{1,2}/\partial x = -ik B_{1,2}$ であるから,

$$A_1 + B_1 = V_1 + W_1, \quad A_2 + B_2 = e^{-\kappa L} V_1 + e^{\kappa L} W_1, \quad (\text{E.1})$$

$$ik(A_1 - B_1) = \kappa(-V_1 - W_1), \quad ik(A_2 - B_2) = \kappa(-e^{-\kappa L} V_1 + e^{\kappa L} W_1) \quad (\text{E.2})$$

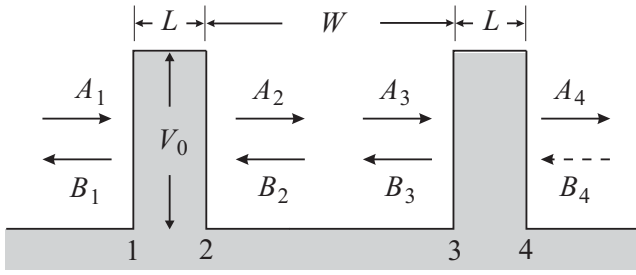


図 4.15 2重障壁ポテンシャルの模式図．

となる． $A \sim V$ の k, κ 依存性の表記は省略した．

以上を解くことで， T 行列は

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \equiv M_T \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

と書くことができ， $\{m_{ij}\}$ は

$$\begin{cases} m_{11} = \cosh(\kappa L) + i \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \sinh(\kappa L), \\ m_{12} = -i \frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa} \sinh(\kappa L), \\ m_{21} = m_{12}^*, \quad m_{22} = m_{11}^*, \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

と与えられる．

図 4.15 のように境界を 1~4 と置き，各境界での波動関数を A_{1-4}, B_{1-4} とする．障壁の転送行列には (E.4) を使用し，量子井戸部分は波の進行により位相が回るだけであるから，

$$M_W = \begin{pmatrix} \exp(ikW) & 0 \\ 0 & \exp(-ikW) \end{pmatrix} \quad (\text{E.5})$$

と書くことができる^{*3}．2重障壁全体の転送行列 M_{DW} は

$$M_{DW} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ikW} & 0 \\ 0 & e^{-ikW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

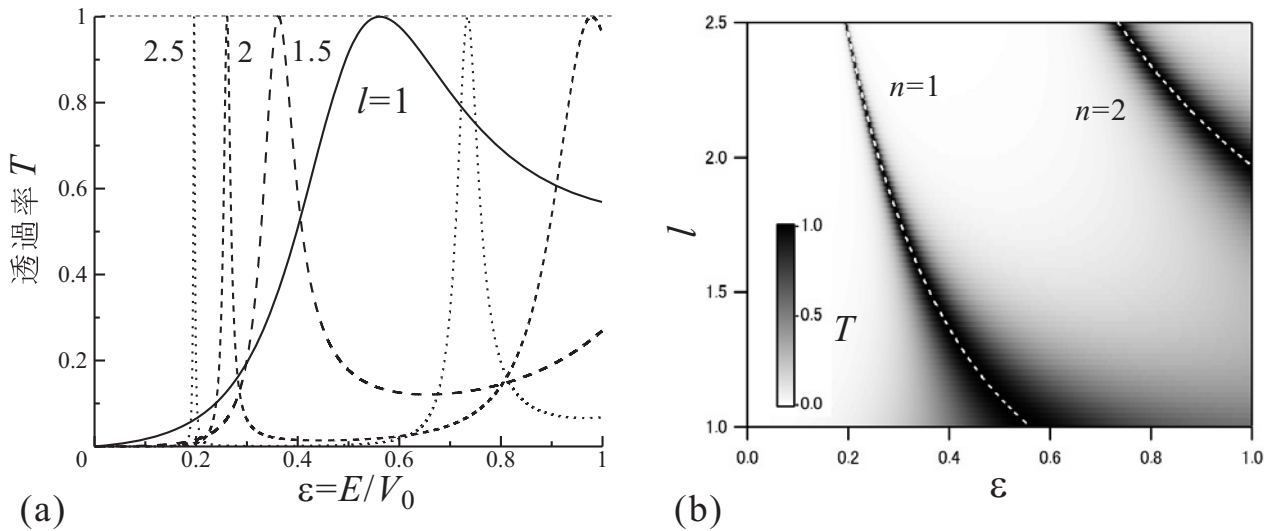


図 4.16 (a) 式 (E.4), (E.7) から計算される 2 重障壁の透過率を透過波のエネルギー ϵ の関数として描いた． $W = 2L$ に固定し，様々な障壁層厚（従って間隔）について計算したもの． l は， $l \equiv (\sqrt{2mV_0}/\hbar)L$ で L を無次元化した量．(b) 同じ計算結果を，濃淡プロットしたもの．白い点線は共鳴条件を数値計算したもの．

^{*3} こうして良いのは， M_T の対角要素が複素透過係数の複素共役の逆数であるからである．複素透過係数そのものではないので注意．

と3者の積で与えられ、これより

$$T_{11} = m_{11}^2 \exp(ikW) + |m_{12}|^2 \exp(-ikW) \quad (\because m_{12} = m_{21}^*)$$

透過率が

$$T = \frac{1}{|T_{11}|^2} = \frac{1}{1 + 4|m_{11}|^2|m_{12}|^2 \cos^2(\varphi + kW)} \quad (\text{E.7})$$

と計算される。

図 4.16 は $W = 3L$ の場合について、(E.7) を計算したものである。共鳴透過によって透過率にピークが生じ、完全透過 (透過率 1) 条件となっていることがわかる。