物理屋のための電子回路論 第 1 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2018 年 9 月 25 日

第 1 章 電磁場と電子回路

1.1 この講義について

1.1.1 講義の目指すところ

本講義は「電子回路」(electronic circuit) について「論」じるものである．物理学で使用する日本語では，その体系が確立されたものについては「量子力学」のように「学」あるいは「力学」をつけ，未確定の仮説でリサーチを行う対象については「量子論」のように「論」と格下げして呼ぶ，という説があるが，電子回路論についてこれを当てはめるのはやや穿ちすぎのように思われる．「回路学」と称する分野もあると思うが，本講義で対象とするのは体系化された「学」というよりは，様々な「ものの見方」，そして実験の役に立つ四方山な知識であり「論」じるのが適当であろう．

本講義の目標は，(1) これから物理学の実験研究に進む学生諸君に，必要最小限の電子回路の日常的知識を与えること，(2) 様々な「物理的なものの見方」，「コンセプト」，「言語（ランゲージ）」（これらは実のところみな同じ）の例を電子回路を舞台に提示し，これまで学んできた物理学の実体演習を行うこと，である．

(1) については，30 年も昔に比べれば分野にもよるが物理実験に求められる電子回路の知識は随分と軽くなっているということはできるだろう．しかし，それでも最低限これだけは，という知識は確かに存在する．これらは「回路学」や「電磁気学」として確立している部分を含んでおり，半世紀程度たっても古びるものではない．一方，長足の進歩を遂げ，日々新しくなってはいるが，とりあえず向こう数年の間くらい，とても便利なので知っておいた方が良い，知識についても多少は触れる予定である．これまで 3 回講義してきて，実学的な部分で，もう少し広げて話をしたい，というところも色々ある．自分でデザインした回路を，実際に製作 (しかも昨今のスマートな皆さんに合わせて，できるだけ手を汚さずに) するには，どうするか，イヴェント型での実験で誤カウントを減らす方法，実験データ解析をもっと (wavelet その他) 突っ込んでやる手法，昨今大流行となった機械学習の応用など．時間も結構一杯だし，無理かもしれないが，特に機械学習はニューラルネットワークなど，回路に関係した話でもあるので，どこかで触れられれば，と思っている．

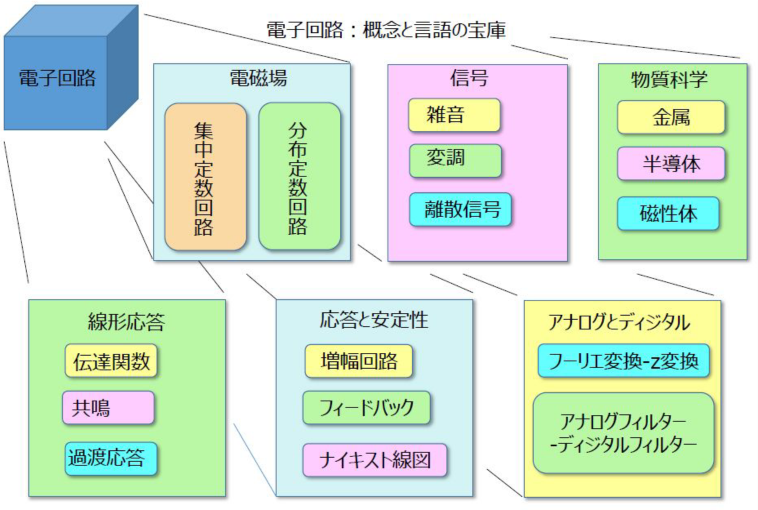
(2) は理論研究に進む諸君も含めて眺めておいてもらっても損はないのではないか，と講師が考える事柄である．これまで，物理学科で勉強してこられた諸君は，分子，原子，原子核，素粒子，固体，電磁場，重力場，など，物理的な実体に適用される物理学を学んできたことと思う．それはもちろん，王道の物理学であるが，それが物理学のすべてではない．自然というものを捉えるために，非常に多くの概念（コンセプト）が創出され，それらの間に成立するある意味メタな物理学はこれもまた大変広大である．電子回路はその格好の舞台であり，ぜひその辺を眺め味わってほしいと思う．

最後に，講師は小学校から電子回路工作にはまり，アマチュア無線や Broadcast Listening (BCL) にはまり，中学では地方から電車で 2 時間かけて秋葉原まで部品買いに出かけ，毎夜新しい回路を作っては部品を壊したり高圧に感電していた典型的なヲタクである（漫画，メイド，AKB，といった趣味はない，念のため）．つまらない電子回路の四

方山話は実に楽であり，話し手としては楽しいが，そのような方向へ走って行ってしまわないよう，気を付けて論じていこうと思う．昨年度も同じ講義を，それなりに懸命に話したので，重なる部分も当然多い（というか大体同じ）が，それはご容赦願いたい．

1.1.2　講義の概要

下にこの講義で見ていく電子回路の様々な側面を大まかにまとめてみた．電子回路は無限ともいえる切り口で見ることができる．ここに並べた 6 つの切り口も，相互に独立とは言えないし，とても粗い見方でしかない．一方，いずれも統合的な見方であって，電子回路を離れてもっと多くの事象にも適用できる汎用的なものでもある．ぜひ，様々な概念をどのように導入し，それらを運用する「言語」をどのように編み出すか，味わってほしいと考えている．



1.2　「電子回路」とは何か

ということを半年かけて講義するわけだから，いきなりこの問いかけに簡単な答えが出るはずもなく，じゃあ半年後にはわかってますか，と言えばそれも心もとない．しかし，ここで考える電子回路について，簡単な見方，方向性のようなものは考えておきたい．

ここでは電子回路を，電磁場を人間が何らかの目的のために制御・使用することを目指して作り上げた空間的構造物，としておこう．人間が作ったものだから人工・天然の区別をするならば人工に分類されてしまうが，時には天然の回路を考えることもあるので，あまり厳密な定義ではない．電磁場を制御するためには様々な物質を使用するが，特に重要なのが**金属** (metal) と呼ばれる一連の物質群である．まず，そこから論じ始めることにしよう．

1.2.1　電磁場と金属

図 1.1　飛行機に落雷 (被雷) した瞬間の写真

まずは，左の写真を見ていただこう．これは大阪 (伊丹) 空港での写真だそうだが，離陸中の飛行機に落雷した瞬間のちょっと衝撃的な写真である．上から雷が落ちてきたのだとすると，機首部分に落雷，尾翼の少し前付近から地面に向かって再落雷しているように見える．こんなことがあると，機体が黒焦げあるいはバラバラになってしまうような悲劇を想像するが，実際には乗員乗客は大きな音と窓の外に光を感じたものの，何事もなく離陸，無事目的地に着陸，機体に特に損傷もなかったという．

これは，金属という物質が電磁場に対して有する極めて大きな

遮蔽力を物語っている．電磁気学において，金属でできた空洞中では外部の静電場が遮蔽されることを学んだと思うが，この事例は，落雷のように比較的速く変化し，大きな電流を伴うような外部擾乱に対しても金属がその遮蔽性を発揮することを示している．

それは，どの程度の速さまで応答できるのだろうか．金属中には莫大な数 (密度) の自由電子が存在し，これらが電場に対して非常に速く移動することで遮蔽が行われる．その応答速度を特徴的な振動数で表すと，プラズマ振動数 (Plasma frequency) と呼ばれる量になる．古典近似で求めてみると [1]，まず，自由電子の運動方程式を，質量 m，運動方向座標 x，素電荷 e，電場 E，時間 t に対して

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE \tag{1.1}$$

と書く．これから角振動数 ω の電場に対して x も ω で応答するとし，$E = E_0e^{-i\omega t}$，$x = x_0e^{-i\omega t}$ とすると，

$$m\omega^2x_0 = eE_0$$

である．この振幅 x_0 で振動する電子を，サイズ x_0，電荷 $-e$ の双極子が振動していると見ると，そのモーメントは $-ex_0$ である．これによる，分極（単位体積中の総モーメント）P は，自由電子密度を n として

$$P = -nex_0 = -\frac{ne^2E_0}{m\omega^2} \tag{1.2}$$

となる．振動数 ω に対する物質の誘電関数 $\epsilon(\omega)$ は一般に

$$\epsilon(\omega) = \frac{D(\epsilon)}{\epsilon_0E(\omega)} = 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0E(\omega)}$$

と表されるから，(1.2) を代入して ($E(\omega) = E_0$ より)

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2}, \qquad \omega_{\rm p}^2 \equiv \frac{ne^2}{\epsilon_0m} \tag{1.3}$$

と表される．この $\omega_{\rm p}$ がプラズマ振動数である．

(1.3) からわかるように，$\omega \ll \omega_{\rm p}$ の領域では金属は非常に大きな負の誘電率を持ち強力な遮蔽効果を発揮するが，$\omega = \omega_{\rm p}$ で誘電率はゼロとなりそれより大きな ω では正に転じ遮蔽効果が失われる．自由電子密度 n は典型的金属である銅（Cu）では，8.5×10^{22} /cc 程度であり，また状態密度から計算した有効質量は，真空中静止電子の 1.3 倍程度である [2]．これから (1.3) よりプラズマ振動数を計算すると，2.3×10^{15} Hz（ただし，角振動数ではなく，周波数にしてある）となる．これは電磁波の波長としては 130 nm 程度で，近紫外に相当する．量子力学，量子統計学が描く金属中の自由電子像は随分と異なっているので修正が必要であるが，オーダー的にはそれ程違わない値が得られる．以上の見積もりから，金属によって電場が大変な速さまで遮蔽されることがわかった*1．

では，磁場はどうか，というと静磁場は常磁性金属では遮蔽されることはない．時間変化する磁場に関しては渦電流により遮蔽が生じる．磁気遮蔽をするには透磁率が非常に大きく，磁化が変化しやすい特別な磁性体が必要である．従って電磁場の内，人工系を作る制御性が高いのは電場の方である．また，電子をはじめ電荷はモノポールが多数存在しているのに対し，磁荷はダイポールでしか存在しないので，ダイナミックな変化が難しく (遮蔽と同じ原因による)，このことからも電場・電位，というものが電子回路の最重要概念の一つとなる．とは言っても，無論，電場-磁場の間には対称性があり，これらは切ることのできない関係にあって磁場を制御・使用する電子回路部品（後述）は多数存在する．また，ダイポールである電子のスピン自由度をこのような「電子回路」として利用しよう，というのが最近はやりのスピントロニクスに他ならない．

*1 ただし，この議論では実空間内距離の考察が欠落している．光速を超えて情報が伝わることはないから，金属といえど遮蔽の影響が到達する速度は光速を超えることはない．この点も回路では当然問題となる．

1.2.2 局所電磁場概念と集中定数回路

人間が電子回路に要求することは極めて複雑多岐にわたる．中には大変複雑なものもある．この難しい要求に対して，Maxwell の方程式で記述される電磁場を使って答えていこう，というわけだが，いきなり仕様書を書かれて「やれ」，と言われても途方に暮れてしまう．

そこで複雑で長大なプログラムを作成するときのことを考えてみる．仕様書に沿ったアルゴリズムをいきなりプログラムするのは大変困難である．まずは，簡単な単機能のプログラムを書き，その数を増やしていく．これらは言語によってサブルーチン，関数，クラスなどと様々に呼ばれるが，やがてこれらを寄せ集めたり，継承したりしてだんだんと大きく複雑な処理をこなすプログラムにして行く．

同様なことを電磁場でも考えよう（というよりこちらの方がずっと先であるが）．何らかの入力（今の場合，外部境界条件の変化による電磁場環境の変化）に対して簡単な応答をする系を考える．このような系を「局所電磁場」と呼ぶことにしよう[*2]．プログラムの例に倣えば，このような局所電磁場を色々と沢山取りそろえることになるが，問題はこれらを寄せ集めると，それぞれは勝手に「局所」電磁場と名乗っていても，遠距離力である電磁力は相互を結合してしまい，独立性が失われてしまうこと，また逆に，ある局所電磁場の応答を別の局所電磁場に伝える手段が必要になること，である．プログラムでいえば，局所変数が使えず，他の関数で同名の変数を使うとこちらの動作に影響が出たり，あるいは演算結果を受け渡す手段がなかったり，という問題に相当する．

このために，上で述べた金属の強力な遮蔽能–結合したものを同電位にする能力を使用する．そもそも局所電磁場の形成にも金属を使用して等電位面を形成することがしばしば行われているので，これらの金属部品を金属で結合する．結合された金属部品はこれにより等電位となるので，各局所電磁場を安定化させることができる．また必要とあれば，相互の静電結合を遮蔽によりカットすることができる．また，ある局所電磁場に何らかの変化が生じれば，それは電流となって結合金属を伝わり，他の局所電磁場にその変化を伝える（すなわち電気信号となる）．このような結合金属はもちろん，１つではなく，多数存在する．それらの相対電位は固定されている場合もあるが，そうと限っているわけではなく，変化し，そのこと自身が信号を伝達する場合もある．

思い切り抽象的に話を進めてきたため，奥歯に物が挟まったような言い方になってしまったが，物理屋としては，やはり電子回路を眺めるときに一体どのような系なのか考えてほしいと思い，このように論じてきた．ここで，普通の呼称を導入すると，上記「結合金属」は**配線** (wiring) である．金属の強力な遮蔽能を考えると，電位を一定に保つためであれば，通常はごつい塊である必要はなく，細い線で十分に足りる．そして，「局所電磁場」は**部品** (component) である．

このように，金属によってある電磁応答をする系が形成されている場合，これを**回路** (circuit) と呼ぶ．特に上記のように部品を配線が結合する，という描像で捉えられる回路のことを**集中定数回路** (lumped constant circuit) と呼ぶ．後述する分布定数回路との対比において「集中」という訳語が使用されているが，本来は “lump” という動詞，すなわち「ひとまとまりにした」ことが強調されており，部品（局所電磁場）概念を指している．次の「定数」という言葉も不思議に響くが，これは次章で見る線形応答を念頭にしたもので，線形応答ではその応答特性は比例係数で表されるので，１つの部品は１つの係数–定数で表される．

1.2.3 「端子」概念

以上，高級言語によるプログラミングとの対比で集中定数回路を考えてきたが，逆に，集中定数回路的にプログラミングを行う言語も存在し，グラフィカルプログラミングと呼ばれる．実験機器制御のためによく使用される Labview などはその代表である．そこで再びこのグラフィカルプログラミング言語による類推を考えてみると，実験機器は言語上では virtual instrument (VI) として扱われ，実験データを様々なインターフェイスを通して吐き出して

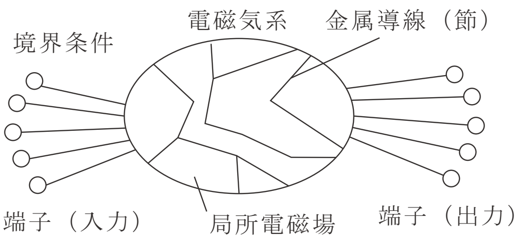
[*2] 講師の勝手な造語である．「局所場」(local field) という用語はプラズマ物理学を始め，固体物理学その他の多体問題を扱う学問ではお馴染みである．混乱しないようにお願いしたい．もう少し良い用語を考えたいが，「集中定数回路」が導入されるまでの一瞬の一時的な用語であるので，とりあえずご容赦願いたい．

くる．回路に相当するプログラム部分は，これらを受け取り，加工・表示・記録する役割を担う．この時 VI とプログラム部分，あるいはプログラムの様々なかたまりの間もやはり配線によりつながれることになる．

さて，VI やサブルーチンなど lump されて考えられる部品たちは，いきなり配線されてしまうのではわざわざ分割した甲斐がない．信号を送り込み，送り出すラインを設置し，個別に動作チェックしてから各ライン間を配線する．この「ライン」に相当するのが**端子** (terminal) である．金属導線による配線は，回路の様々な部分を結合し，これらの間の信号伝送を担っている．端子は，その一部を外部に接続可能な金属として取り出したものである．言い換えれば，回路に何らかの境界条件を与え，その応答を何らかの電磁的物理量として取り出すのが端子である．

このように定義すると，端子というのは集中定数回路の下位概念のような感じがするかもしれないが，そうではない．ある系が限られた数か所を除いて孤立しており，外界とのやり取りがこの数か所のみで行われる場合，この「数か所」が端子である．この時，端子にいかなる外部境界条件を与えるかを**バイアス条件** (bias condition) と呼ぶ．これらは，電子を量子力学的な波動として扱わなければならないナノスケールのデバイスにおいても重要な概念である．

1.2.4　電子回路概観



そこで，これまでざっと見てきた電子回路の概念をまとめてみると，左のようになるだろうか．要するに，金属で要所をまとめられた電磁気系で，その境界条件は一部の端子によって決められる．このような境界条件の決定にかかわる端子を**入力端子** (input terminal) と呼ぶ．この電磁気系の境界条件に対する応答はやはり端子を通して次の回路あるいは電子回路と他の物理系を結合する**トランスデューサー** (transducer) に伝えられる．このような端子が**出力端子** (output terminal) である．電磁場が主役の形であるから当然であるが，このような静的な図には現れない重要な共通パラメタとして時間がある点には留意しておこう．

1.3　2 端子素子

集中定数回路の概念から，回路部品とは局所電磁場を指すが，更に現実の電磁場を簡単化・抽象化したものである．簡単化の具体的な方法が端子であり，部品外部からは端子の電位と端子を流れる電流以外の物理量 (物理現象) は認知することができない (認知する必要がない)．端子を通した時にその部品がどのように見えるかがその部品の**特性** (characteristics) ということになる．

回路部品は大抵 2 つ以上の端子を持っている．1 つしか端子のないものとしては，アンテナ，アース (接地) など，また，灯台端子，テフロンポストなどと呼ばれるものもある．この最後のグループは物理的に配線を支えることがその役割であり，現実の回路製作には大切であるが，モノターミナル素子，とは言えない．アンテナ，アースは全体として 1 つの部品，と思えば，2 端子素子と考えることができる．というわけで，まずは，2 端子を持つ回路部品について見ていくことにする．

1.3.1　電流電圧特性

2 端子素子を箱から端子が出ているシンボルで表すとする (図 1.2(a))．2 端子素子を特徴づけるわかりやすい特性が**電流電圧特性**である．電流の変数名を I，電圧の変数名を V とすることが多いことから，I-V 特性と略されることが多い．端子 1，2 の間の電圧が V_{12} の時，1→2 間に流れる電流を I_{12} が V_{12} の関数として

$$I_{12} = f(V_{12}) \tag{1.4}$$

のように書けるとき，関数 f をこの素子の電流電圧特性と呼ぶ．

2 端子素子には I-V 特性が定義できるものとできないものが存在する．**過渡応答**のことを考えると，現実の素子で厳密に I-V 特性が定義できる素子は存在しない．が，時間スケールを応答時間よりも十分長くとれば，(1.4) が良い

近似となるし，過渡応答に関しても，(1.4) の I-V 特性を持つ素子と，それ以外の素子との組み合わせと考えることで近似することができることが多い．図 1.2(b)，(c)，(d) にそれぞれ抵抗器，ダイオード，トンネルダイオードの I-V 特性の模式図を描いている．抵抗器やダイオードの特性のように f の逆関数 g が定義できる場合は

$$V_{12} = g(I_{12}) \tag{1.5}$$

と書いて，これも I-V 特性と呼ぶ．また，図 1.2(d) のトンネルダイオードのような特性の場合は単調でないため g は単純には定義できないが，多価関数として定義することにする．

1.3.2 受動素子

(1.4) は単なる関数関係を示しているに過ぎない．実際の素子では，まず，境界条件，すなわちバイアス条件を (1.5) を拡張して，演算子 $\hat{A}$ について

$$V_{12} = \hat{A} I_{12} \tag{1.6}$$

と書く．小中学校の理科以来よく知られた 3 種類の回路素子について，

$$V_{12} = RI_{12} \qquad \text{(抵抗器)}, \tag{1.7a}$$

$$V_{12} = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int^{t} I_{12}(t')dt' \qquad \text{(キャパシタ)}, \tag{1.7b}$$

$$V_{12} = L\frac{dI_{12}}{dt} \qquad \text{(インダクタ)} \tag{1.7c}$$

と定式化することができる．これらは，線形システムの基本であるインピーダンスを構成するための基本的な (受動) 回路素子 (passive element) である．R，C，L は定数で，それぞれ抵抗 (resistance)，キャパシタンス (容量) (capacitance)，インダクタンス (inductance) と呼ぶ.

1.4 回路図

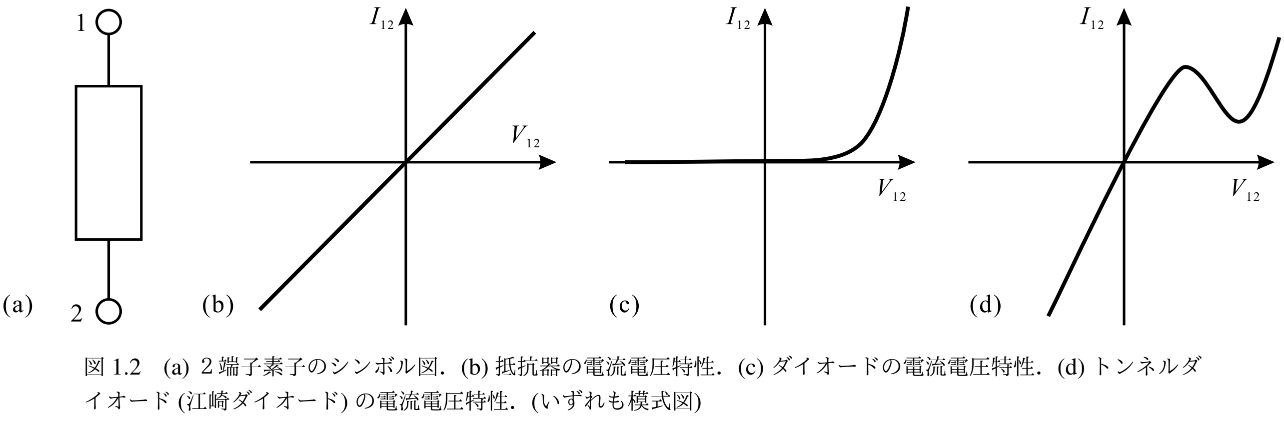


図 1.2 (a) 2 端子素子のシンボル図．(b) 抵抗器の電流電圧特性．(c) ダイオードの電流電圧特性．(d) トンネルダイオード (江崎ダイオード) の電流電圧特性．(いずれも模式図)

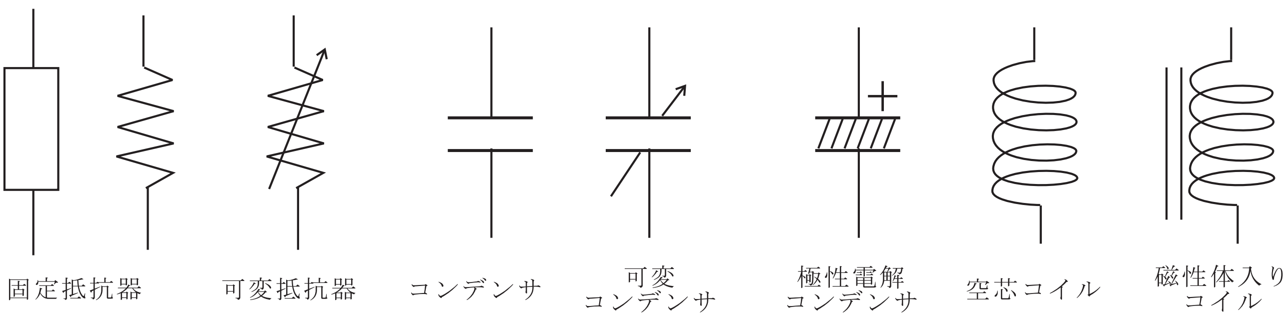
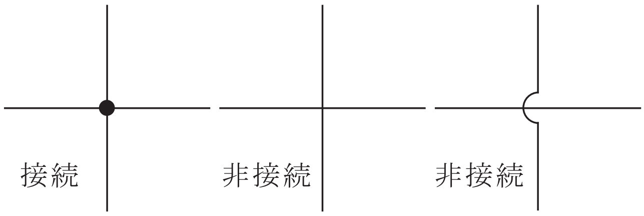


図 1.3 2 端子素子の回路記号例

ここまで,「回路」というものの構成要素概念を色々と導入してきた．これらの組み合わせにより回路を形成するための言語に相当するものを考えてみる．言語はやや抽象度の高い概念によって定められる．回路言語の最も基本的な概念のひとつ，回路図を導入しておこう．



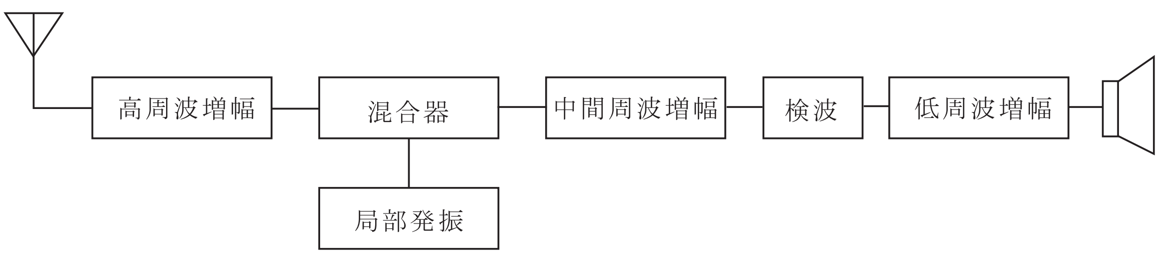
1.4.1　基本的な回路図

回路素子のもっとも簡単な結合法は，すでに述べたように金属導線で端子を直接結合するものである．結合された部分は電磁気的には同電位を表し，回路網の取り扱いでは**節** (node) と呼ばれる．導線を線で表し，結合の様子をトポロジカルに 2 次元の図面上に表したものを**回路図** (circuit diagram) と呼ぶ．各素子にはそれぞれ特徴的なアイコン (回路記号) を割り振って素子の素性がわかるようにする．回路記号には様々な流儀があるが，規格によって統一化が図られており，図 1.3 に示したジグザグ型の固定抵抗器記号はよく使用されて馴染みもあるものであろうが，国際規格では長方形を使用することになっている．導線同士の結合は右図のように黒い小さな丸で表す．黒丸がない導線のクロスは，結合がなく単に図面上の都合により線が交差しているだけである．この点を誤解しないよう，右図のように丸く線をまたぐように描いていた時期もあるが，現在ではこのような流儀は殆ど見られない．

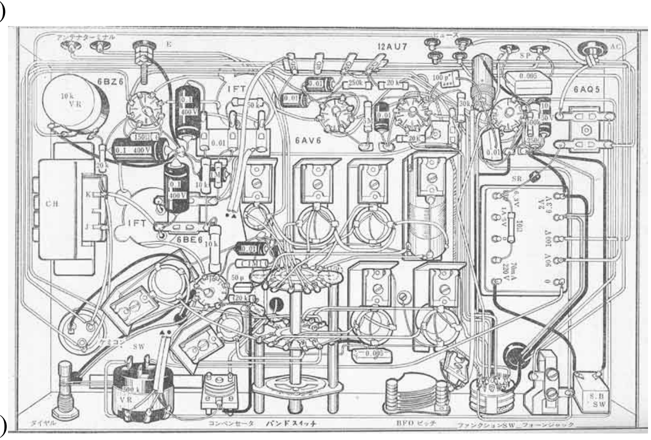
1.4.2　様々な「回路図」

回路図には非常に多くの種類，階層がある．図 1.4 はかつてのアナログ通信時代に全盛を誇ったスーパーヘテロダイン型受信機の，(a) **ブロックダイアグラム**，(b) 実体配線図 と呼ばれる回路図形式である．昔懐かしい，電源トランスを搭載し，真空管を用いた回路であるが,「回路図とはどのようなものか」を感じるための例に過ぎないので，当然内容を理解する必要はない．同じ回路を表していながら，全く異なる図面になっていることがわかる．

ブロックダイアグラムでは，回路は機能ごとに極めて簡単化され，信号の流れを線で表している．消費エネルギーを供給するための電源とその供給ラインなどは省略されている (もちろん，明記する場合もある)．複雑な回路全体の



(a)



(b)

図 1.4　(a) ブロックダイアグラムの例 (スーパーヘテロダイン受信機)．(b) 実体配線図の例 (三田無線 DX-CS-7 スーパーヘテロダイン受信機)．CQ ham radio (CQ 出版社) 1966 年 5 月号 p.106「調整に主体をおいた デリカ DX-CS7 の作り方 / 三田無線研究所長 茨木悟」.

動作を理解するためには便利，というより必要不可欠である．このように大幅な簡単化・抽象化を行っても大きな回路になると複雑を極めたものになる．また，上に述べた「基本的な回路図」の読み方に慣れた技術者は，頭の中で半ば無意識にブロックダイアグラムへの写像を行っていることが多い．ちなみに，図 1.4 の受信機を，1.4.1 の部品 + 配線による回路図で表すと，図 1.5 のようになる．

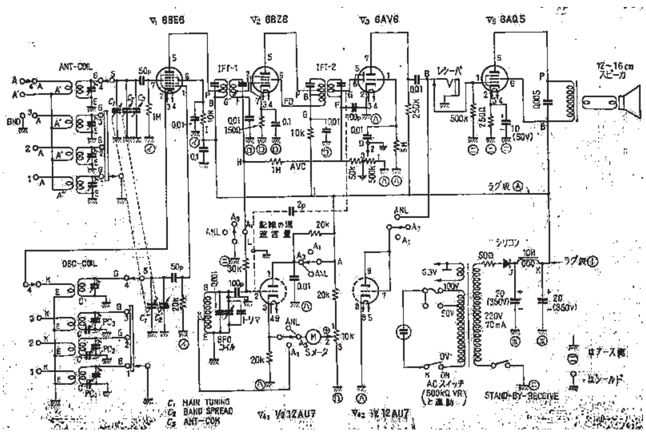


図 1.5　図 1.4 の受信機の回路記号を使用した基本的回路図.

(b) の実体配線図は，近年ほとんど見かけなくなった．回路図というよりは，部品配置や配線を見やすく描いた絵であり，ホビーとして真空管回路を組み立てる人にはたいへん助けになった．というのも，このようなプリント基板を使わない回路では，抵抗器やコンデンサなどの小物部品は配線しながら配置していったからである．いずれにしても，回路図というものが現実の回路のモデリング，抽象化であることが実感できると思う．講師の感覚では，現実世界の現象を幾つかの簡単な自由度 (あるいはその集団) に落としこんでそれらを結ぶ数学で記述する物理学のモデリングや，地球表面を地図という 2 次元図形に落としこむ作業，トポロジカルな結合だけに着目する路線図への抽象化，資本の流れなど抽象的な事象を逆に図面上に可視化する作業など，様々なモデリング，抽象 ↔ 具象の変換作業のひな形が回路図にはあると思っている．

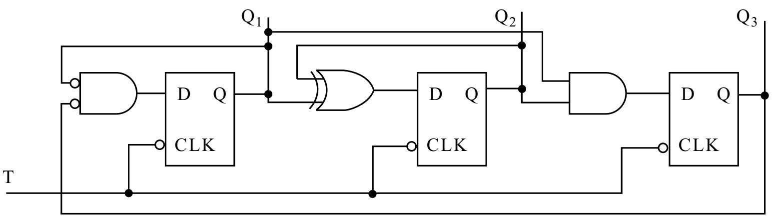
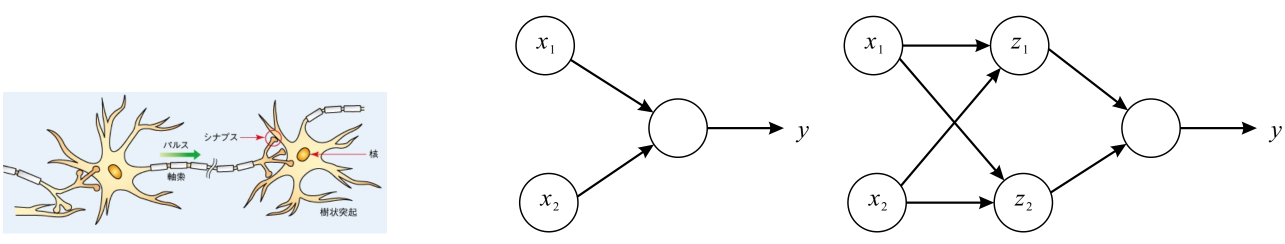


図 1.6　ディジタル回路．3 ビット同期カウンタの回路図.

図 1.6 は，ディジタル回路の回路図例である．これは非常に丁寧に配線を描いた方であり，はんだ付けで回路を組むような原始的なやり方をする場合でもこの図があれば十分である．ハードウェア記述言語 (HDL など) を使う場合は，この図から最も原始的にはコードを書き起こし，物理的に人間が配線をすることはない．いずれにしても，論理を乗せる信号線と論理演算を行う素子のみを記述し，一見電磁場などからは離れてしまっているように見える．

このディジタル回路は，動物の神経回路に類似したところがある．図 1.7(a) は神経回路のニューロンとそれらをつなぐシナプスの模式図で，樹状突起を伝わる神経興奮信号は，シナプスで伝達物質を介して次の樹状突起から別のニューロンに伝わる．そこで，むしろこれをモデル化した「回路」がニューラルネットワーク (neural network, NN) である．「回路図」は，良く図 1.7(b)，(c) のようにノードとそれをつなぐ信号の流れで構成される．広大な「回路図」の世界が，何故かどれも人間にとってはすぐになじめるものであるのは，脳の動作過程となじみがあるから，というのは無理な類推だろうか．



(a)　(b)　(c)

図 1.7　(a) ニューロンとシナプスの概念図．(b) ニューロン回路の例．(c) ニューロン回路の例 (パーセプトロン)

1.5　抵抗器

いきなり抽象論を繰り広げてもつまらないことこの上ない (少なくとも実験屋である講師は実は抽象論は好きでも得意でもない)．延々抽象論を続けてすっかり肩が凝ってしまった．物理実験を行う上で大切な電子回路の知識 (アキバ的，あるいはニッポンバシ的知識) を伝授することもこの講義の大切な目的であるので，ここで，代表的な 3 つの受動素子のやや具体的な点を見ておこう．すなわち，ここからしばらくの間，2 端子素子のベールをひん剥いて「端子の向こう」を覗いてみることにしよう．鬼が出るか蛇が出るか，はたまた，鶴が機を織っているのか，固体物理屋にとっても非常に興味深い世界が広がっている．

(1.7a) の**オームの法則**は，近似則ではあるが，フェルミ準位付近の状態密度をほぼ一定として良い合金類その他の物質においては広い電圧電流範囲において非常に良く成立する．固定抵抗器とはこれらの材料を適当な形状として配線しやすい金属電極 (端子) を 2 つつけたものである．

一般の電流電圧特性 (1.5) でも，電圧が「飛び」を示すなどの特別な点を除いて一定の狭い電流 (電圧) 範囲であれば，**微分抵抗**

$$R_{\mathrm{d}} \equiv dg/dI_{12} \tag{1.8}$$

を考え，$\delta V_{12} = R_{\mathrm{d}}\delta I_{12}$ と (1.7a) の類似型に書くことができる．電子回路で「抵抗器」と呼ぶ場合は，一般にあらゆる電流電圧範囲で (1.7a) が成立するもの，とされ (逆に現実にはそのような理想的抵抗器は存在しないが) ているが，小振幅の高周波回路などを考える際には (1.8) によって抵抗器に置き換えた等価回路とする場合もある．

1.5.1　各種抵抗器

抵抗器も無数に分類することができる．以下幾つかの分類を示しながら抵抗器を紹介する．

(a) 回路図的分類

(1.7a) の R が変化しない**固定抵抗器**と何らかの外部パラメーターによって変化する**可変抵抗器**とに分類される．固定抵抗器についてはこの後見ていくことにして，物理実験で良く使用する可変抵抗器を見ておこう．

代表的なものを図 1.8 に示している．(a) は小学校の理科などでもお馴染みの直線摺動接触を用いた可変抵抗器で，巻線形の裸線の抵抗の上を接点を滑らせるものや，細い単一の線の上をすべらせるものがある．巻線型の場合は，巻線のピッチにより調整できる分解能が決まる．

(b) は最も代表的な回転型の可変抵抗器で，このような形状の場合，機器表面につまみを出して人間が指で回転させることで抵抗が変化する．ドライバーで回転させることで抵抗値を変化させ，回路定数の調整に使う，トリマーと称するもの (半固定抵抗) もある．巻線形や，ディスク型のカーボン抵抗体を回転させるものなど様々である．バリオーム，ポテンショメーターなど様々な呼称がある．現在ではほとんど使われることはないが，かつては音響信号の最終段の増幅器のゲイン調整に使用され (古い機械にある「Volume」つまみ)，人間の耳の音量感覚に合わせて回転角と抵抗値とが非線形の関係にある A 型と呼ばれる可変抵抗器が存在する．これに対して，回転角と抵抗変化が比例関

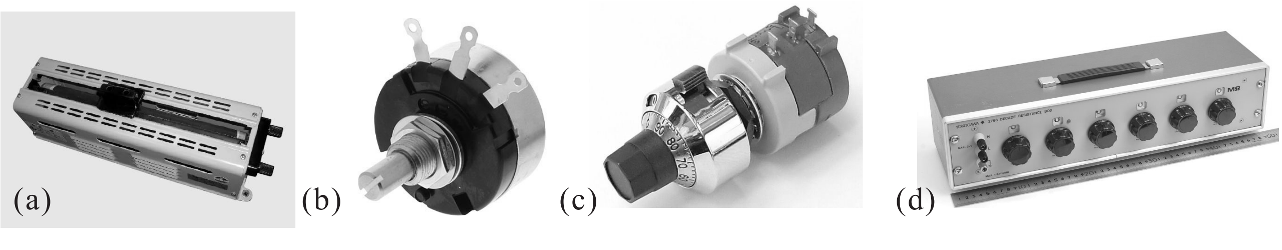


図 1.8　(a) 直線摺動型可変抵抗器 (b) 回転型可変抵抗器 (c) ヘリカルポテンショメーターおよびバーニアダイアル (d) 桁式 (ディケイド) 標準抵抗器

係にあるものは B 型と呼ばれる．写真を見ると，端子が 2 つではなく 3 つ出ていることに気づかれると思うが，これは，両端の端子に全体の抵抗が接続され，中央の端子に摺動接触片が接続されている．従って端子に 1，2，3 と番号を振ると，$R_{13} = R_{12} + R_{23}$ で R_{13} は固定で，回転角を $\Delta\theta$ と置くと，$\Delta R_{12} = -\Delta R_{23} \propto \Delta\theta$ である．

(b) の回転型は，通常 R_{12} を 0 から R_{13} まで変化させるのに，回転角は 2π 以下である．精密な抵抗制御を広範囲にわたって行いたい場合，この変化のために複数回 (多くは 10 回転) の回転を必要とする (c) のヘリカルポテンショメータ (「ヘリポット」と略される) を使用する．角度を精密に制御/測定するためのバーニアダイヤルを合わせて使用することが多い．

(d) のディケイド型標準抵抗器は，較正された固定抵抗器をロータリースイッチで切り替えて抵抗を変化させるもので，非常な高精度が得られるが，一般に体積が大きくなってしまうことと，特に高い桁を切り替える際にいわゆる「グリッチ」と呼ばれる大きなスパイクノイズが生じることなどの問題もある．

(b) 形状による分類

以降は固定抵抗器に限って分類を見ていこう．小信号 (小電力) 回路に使用する抵抗器について外形 (形状) で分類するとすれば，まず面実装用であるか，そうでないか，ということで分類される．**面実装用**とは，半田合金 (本来は Sn と Pb の合金であるが，環境への配慮から，Pb を Zn その他の金属で置換する鉛フリー半田が現在の主流である) を予め流したプリント基板 (溶融合金内を基板をくぐらせることで流す) の表面に部品を配置し，オーブン内で瞬間的に熱して半田合金を溶かして**リフロー**状態にして完全自動配線するための部品形状のことを指す．このため，抵抗器では端子の「足」が出ておらず，図 1.9(a) のように，小さな四角い板状の抵抗体の両側に細い帯状の金属電極を出した形をしている．**チップ型**抵抗とも呼ばれる．また，講師は見たことがないが，表面実装用の円筒形の抵抗器もある，とのことである．

表面実装用でない抵抗器の特徴は，図 1.9(b)-(e) のように，配線用の端子線が両側に出ていることである．(b), (c), (e) が円筒形，(d) が角形である．円筒形の抵抗の多くは，円筒形にした皮膜抵抗体にスパイラルを切る形で抵抗値を上げているため，(1.7a) の R 成分以外に (1.7c) の L 成分も持っていることが多く，高周波回路では，薄膜に往復ラインを切ることで抵抗にしている角形の抵抗器の方が有利になることがある．

(c) 材質による分類

抵抗体の材質は，合金を薄い膜にした**金属皮膜抵抗** (メタル抵抗) が温度特性，経年安定性に優れ，良く使用される．上に述べたように，円筒形でスパイラルが切られているとインダクタンス成分が問題となるが，合金線を巻いて抵抗体とする**巻線抵抗**に比べるとむしろインダクタンスは少ない．一方，薄膜がそれ程電流を流せないのに対して線材は大きな電流を流せるため，電源回路などやや大きな電力を扱うところでは巻線抵抗が良く使用される．このような巻線抵抗は，放熱特性を良くするため，中空円筒にしてほうろうで固めたり (ホーロー抵抗)，セメントで固めたもの (セメント抵抗) もある．

一方，簡単な加工で済み安価なため良く使用されるのが**炭素皮膜抵抗** (カーボン抵抗) である．ただし，温度特性，経年安定性，ノイズ特性のいずれにおいてもメタル抵抗に劣っている．

面実装用チップ抵抗に良く使用される抵抗体として，金属や金属酸化物をガラスと混合し，高温で焼結させたメタ

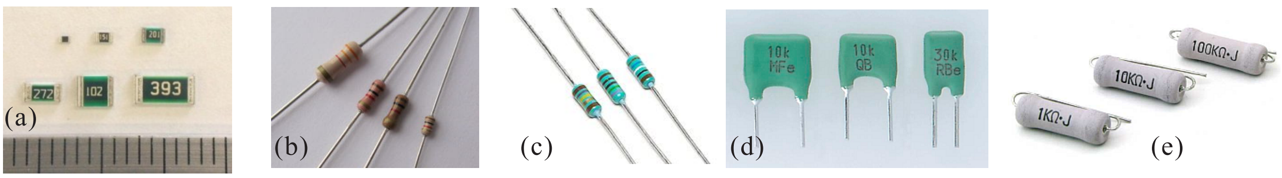


図 1.9　様々な小電力固定抵抗器．(a) 表面実装用．(b) 炭素被膜抵抗．1/2W 型から 1/8W 型まで．円筒型で抵抗値はカラーコード表示 (後述) されている．(c) 金属皮膜抵抗．円筒型，カラーコード表示．1/4W 型．(d) 角型金属皮膜抵抗．(e) 1/2W 型円筒形参加金属皮膜抵抗．

ル・グレーズ皮膜がある (metal glaze resistor).

1.5.2 抵抗値の表示

色	数値	倍率	許容差
黒	0	10^0	-
茶	1	10^1	±1%
赤	2	10^2	±2%
橙	3	10^3	±0.05%
黄	4	10^4	-
緑	5	10^5	±0.5%
青	6	10^6	±0.25%
紫	7	10^7	±0.1%
灰	8	-	-
白	9	-	-
金	-	10^{-1}	±5%
銀	-	10^{-2}	±10%
なし	-	-	±20%

電子回路部品は一般に大変小さく，部品名，端子 (足，リード) の名前，特性値など，部品上の印刷や形状から一義的にわかるよう，様々な工夫が凝らされている．固定抵抗器も，抵抗値や消費可能電力 (W 型) など，簡潔で紛れのない方法でわかるようになっている．W 型については，形状と大きさから判定することができる．

抵抗値の表示で，円筒形の抵抗器で良く使用されるのが，図 1.9(b)，(c) に見られる，カラーコードである．これは，国際電気標準会議 (International Electrotechnical Commission, IEC) の規格によるもので右の表のように決められている．円筒形抵抗器の場合，図 1.9(b)，(c) のように色のラインを付けておけばどの角度からも読め，間違いも少ないと期待できる．例えば，図 1.9(c) の中央の抵抗は，茶黒黒緑紫であるから，10MΩ で 0.1% 精度の高精度な抵抗 (これ程高い抵抗値では珍しい高精度) であることがわかる．

これに対して，図 1.9(a) のチップ抵抗の場合，3 桁ないし 4 桁の英数字が表示されている．これは，一番右側の数字が，これを q とすると，$\times 10^q$ の意味である．残りの左の 2 桁ないし 3 桁の数字が抵抗値の有効数字を表している．アルファベットの R，L が使用されていることがあるが，R は小数点を表し，L は mΩ 単位の小数点を表す．また，例を挙げると，1R5 → 1.5 Ω，2L00 → 2mΩ，1001 → 1kΩ などである．

図 1.9(d)，(e) のように直接値が印刷されている場合もある．

1.6 キャパシタ (コンデンサ)

高校物理以来なじみのあるキャパシタ (コンデンサ) [*3]は，いわゆる平行平板キャパシタで 2 枚の金属板を対向させて配置したものであろうが，実際に使用されているキャパシタも実質これに近い構造を持つものが多い．そうでないものも，多くはこの変形である．

1.6.1 可変キャパシタ

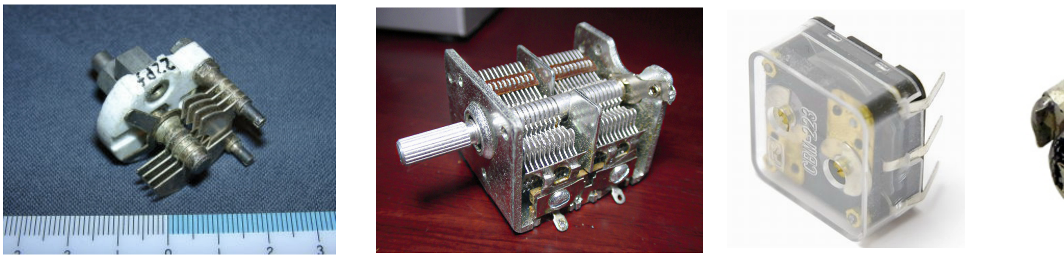
現在余り使用されることはなくなったが，かつては特にラジオ受信機には必ずと言って良い程アナログのダイアルが付いていてこの可変キャパシタ (variable capacitor) [*4]のシャフトを回転させるようになっていた．半円状の金属板を櫛の歯のように並べて一体として回転できるようになっており，同じような形状の金属板群と噛み合わせ回転角によりオーバーラップ面積 S が変化する．電気容量 ((1.7b) の C) は，高校物理で学んだように，平行平板型では板の間隔を d として，

$$C = \epsilon\epsilon_0 S/d \tag{1.9}$$

であるから，円盤状であればほぼ回転角に比例して C が変化する．図 1.10(a)，(b) は誘電体部分に空気を使用する空気キャパシタで，サイズが大きくても余り問題にならない真空管回路によく使用されていた．小さなラジオ等ではサイズを小さくすることが求められ，コイルのインダクタンスを大きくするためフェライトを入れて「バーアンテナ」

[*3] 電子回路に使用される capacitor も，かつては良く condenser とも呼ばれていたらしいが，英語では capacitor を使うのが普通になった．おそらく，化学実験等で使用する「凝結器」との混乱を避けるためと思われるが，日本ではこのような混乱もないせいか，かつての名残りで，高校物理以来コンデンサーと呼ばれている．ここでは，英語に合わせてキャパシタと呼ぼう．困るのは，アキバでもトラ技でもコンデンサーでないと通らないことで，受講者はその点注意．

[*4] 米英で何と言っているかは知らないが，日本では variable condenser を縮めて「バリコン」と呼ぶ．“varicap”というと，通常，回転式の空気キャパシタのことではなく，ダイオードの微分容量をバイアスで制御するタイプのものを指す．



(a) (b) (c) (d)

図 1.10　様々な可変キャパシタ．(a) 空気キャパシタ．絶縁体にステアタイトを使っていて，日本では「タイトバリコン」と呼ばれている．大電力用． (b) 2 連空気キャパシタ． (c) ポリエチレンキャパシタ． (d) セラミックキャパシタ (トリマー)．

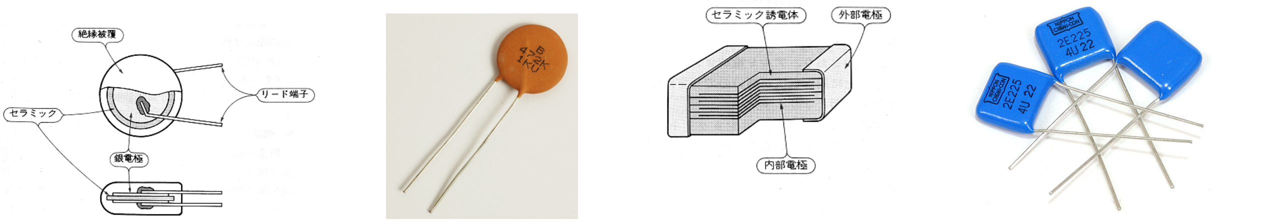
としてアンテナと兼用し，誘電体にポリエチレンを使った図 1.10(c) のように小さなサイズのものが使用された．誘電体では，その他，セラミック (図 1.10(d)) やマイカ，フィルム，サファイアなどが使われている．

1.6.2　(誘電体) 材料による分類

次に，固定容量キャパシタを見ていこう．キャパシタは，抵抗器以上に特に誘電体材料による特性差が大きいので，まずは誘電材料による違いを見ておこう．すでに出てきた空気キャパシタは平行平板型に近いものだが，主な用途は可変キャパシタである．

(a) セラミック・キャパシタ

次に比較的平行平板に近いものが，酸化物 (セラミック) を誘電体とするキャパシタである．構造的には**単板型**と**積層型**に分かれ，酸化物誘電体も低誘電率系，高誘電率系の 2 種類，更に温度特性や誘電正接などの特性を若干犠牲にしても高容量が必要な場合は，高誘電率酸化物にドーピングを行った半導体系，と呼ばれる材料が使われることもある．



(a) (b) (c) (d)

図 1.11　(a) 単板型セラミックキャパシタの構造，(b) 例．(c) 積層型セラミックキャパシタの構造，(d) 例．

単板型，積層型は文字通り一層の誘電体を単板で挟んだ構造になっているか，何層も重ねているかの違いである．単板型は図 1.11(a) のように簡単な構造であり，大抵 (b) のような外観をしていてわかりやすい．ただし，低誘電率材料，高誘電率材料で外形の差がないので，用途上問題になる場合，調べておく必要がある．積層型は，図 1.11(c) のように，可変空気キャパシタと同様，櫛状の金属平板を入れ子構造にして重ねているため，ほぼ積層数倍の容量が得られる．形状は (d) のように四角くなったり，その他様々で，後述のフィルムコンと区別がつかず，やはり調べておく必要がある．容量表示は 3 桁の数字の印刷によるものが多く，単位は pF である．

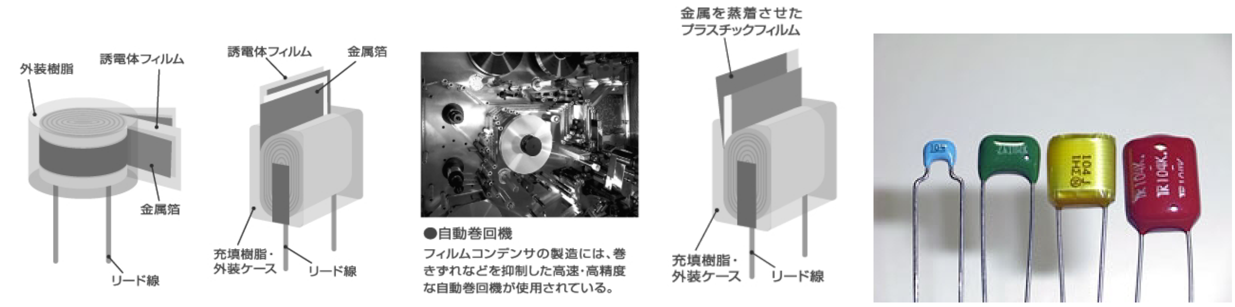
高誘電率酸化物としては，強誘電体のチタン酸バリウム ($BaTiO_3$) が使われることが多い．強誘電体であるため，比誘電率が極めて大きく大きな容量が得られるが，応答が非線形になり (電子回路業界では「容量が電圧に依存する」と表現する)，温度変化も大きい．更に，強誘電ドメインの形成とランダムな動きに伴うバルクハウゼン雑音も無視できず，電気容量が回路定数として問題になるような精密な計測回路には使用できない．ただし，高周波特性は固体

を誘電体として使用するキャパシタの中では良好である．不純物ドーピングにより導電性を生じさせた場合，そのまま金属板で挟んでもリークが大きすぎてキャパシタとして使用できないため，ドープした材料を酸化膜で包んだり，金属板電極部分に堰層と呼ばれる薄い絶縁層を設けるなどの工夫をする．容量以外の諸特性は当然劣る．

(b) フィルム・キャパシタ

フィルム・キャパシタは，誘電体として有機ポリマープラスティックフィルムを用い，この両側に金属箔を配置，あるいは，フィルムに金属薄膜を蒸着したものを巻き込んだもの，あるいは，積層型にしたものである．良く使用されるポリマーは次のようなものである．

誘電体	略称	特徴
ポリエチレン・テレフタレート	PET	最も一般的な誘電体．耐熱・耐寒性に優れ，安価．ポリエステルとも呼ばれる．
ポリプロピレン	PP	絶縁抵抗が高く，低誘電正接 (低損失) のため，大電流用などにも適している．ただし耐熱性にやや劣る．
ポリフェニレン・スルフィド	PPS	耐熱性，温度特性に優れるが，高価．
ポリエチレン・ナフタレート	PEN	耐熱性に優れるが，温度特性において劣る．



(a) (b) (c) (d) (e)

図 1.12　箔電極フィルムキャパシタ (a) 巻回型 誘導巻き (b) 巻回型 無誘導巻き (c) 箔電極キャパシタの巻回機蒸着型フィルムキャパシタ (d) 巻回型無誘導巻き (e) フィルムキャパシタの外観．TDK web ページ http://www.tdk.co.jp/techmag/electronics_primer/vol4.htm より．

図 1.12(a)，(b) は箔電極を使ったキャパシタの構造模式図だが，(a) では一様に重ねて巻きつけ，巻き出し部分と巻き終わりで両側の箔電極からリード線を出しており，巻いたことで電極がコイルとして働きインダクタンスを生じている．これに対して，(b) では箔電極を表と裏でずらしておき，側面からリード線を引き出すことでインダクタンス成分を失わせる無誘導巻きになっている．蒸着膜を使用しても，(d) のように原則同じである．外観は (e) のように様々であり，外観からの判断は危険である．

フィルム材質にもよるが，一般に損失 (誘電正接) は小さく，直線性にも優れ，ノイズもセラミックと比較すると少ないため，低周波計測回路に適している．高周波特性も巻回方にもよるが，比較的良好である．大きな容量のものが作りにくいのが欠点である．

(c) 電解キャパシタ

キャパシタの片側の電極に電解質を用いたものを**電解 (質) キャパシタ** (electrolytic capacitor) と呼ぶ．もう片側の電極には，アルミニウムの片面を酸化して酸化アルミニウム (Al_2O_3) にしたものを用い，この Al_2O_3 層を誘電体として使用する．図 1.13(a) に示したように，電解質として電解液を電解紙にしみこませたものを使用することが多い．固体電解質を用いる場合もある．

製造工程では，アルミニウム箔表面を電解エッチすることでポーラス状の凹凸が非常に激しく従って表面積が非常に大きな構造としながら同時に極めて薄い Al_2O_3 膜を形成する．電解液含浸の電解紙を接触すると，このポーラス状表面の凹凸に電解液が浸透して誘電体が薄く巨大な面積のキャパシタが現れる．反対側には自然酸化膜状態のアルミ箔を貼って絶縁膜と一緒に巻き込むことで大きな容量を持つキャパシタを作ることができる．

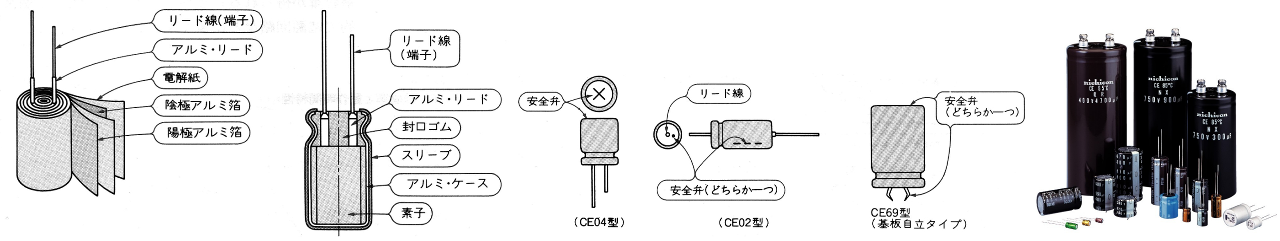
このように非対称な構造しているため**極性**が生じる．ポーラス酸化膜の耐圧内では持続的電流は流れないが，外部電圧が変化すると電極内には過渡電流が流れる．自然酸化膜側で酸素が発生する向きに電流が流れると，酸化膜が厚くなって著しい性能劣化を起こしたり，最悪の場合，気体酸素圧力によってパッケージが破損し電解質が飛び散る事故が生じる．図 1.13(c) で「安全弁」とあるのはこのような誤配線による圧力の逃しである．

図 1.13(b)-(c) に示したように，何種類かのパッケージがあるが，類似性があり，(d) のように外観から電解キャパシタであることは比較的容易に判断できる．

(d) タンタル・キャパシタ

タンタル・キャパシタもアルミニウム電解キャパシタと類似のものであるが，温度特性，周波数特性が大幅に改善されている．

タンタル・キャパシタの工程の一例を挙げると，タンタル粉末を焼き固めて焼結体として有効大面積を作り，陽極酸化法により酸化物誘電体を形成する．これを硝酸マンガン液に浸して加熱することで固体二酸化マンガン層 (電解質) を形成する．これにグラファイトと銀ペーストで電極 (陰極) を形成する．



(a) (b) (c) (d)

図 1.13 (a) 電解キャパシタの構造模式図 (b) パッケージ内部模式図 (c) パッケージ外観 (d) 様々な電解キャパシタ．

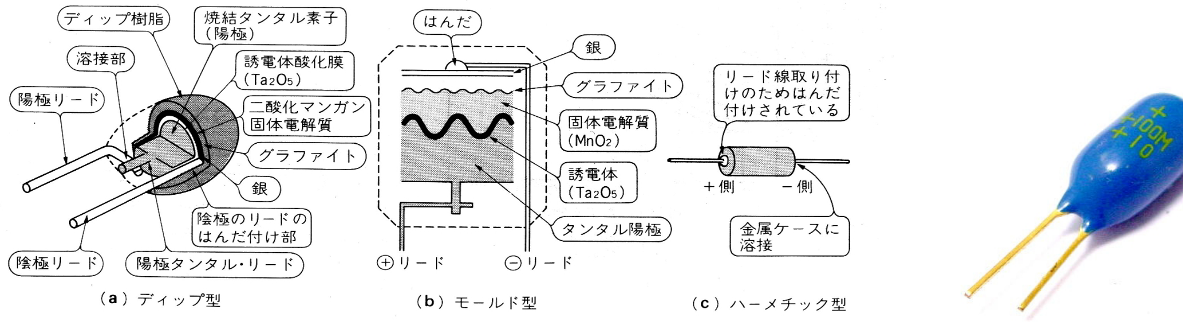
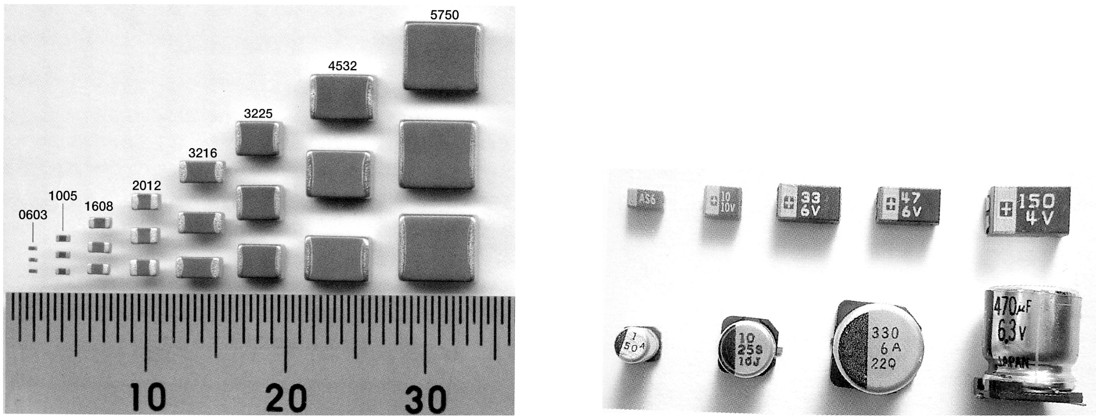


図 1.14　タンタル焼結体固体電解キャパシタの構造.



(a) (b)

図 1.15　(a) チップ型積層セラミックキャパシタ (b) 上列：チップ型タンタル・キャパシタ．下列：チップ型電解キャパシタ.

1.6.3　面実装用チップ型キャパシタ

以上述べてきた様々な固定キャパシタの殆どについて面実装用のチップ型のものが開発され，売りだされている．大量に安価に，かつ極めて小さく作製するため様々な技術が開発され，これも大変面白いものであるが，余りにも「トラ技」的知識に深入りするので，図 1.15 にそれらの一部の写真を掲載するに留める．興味がある方は，[6] などを参照して欲しい.

1.7　インダクタ

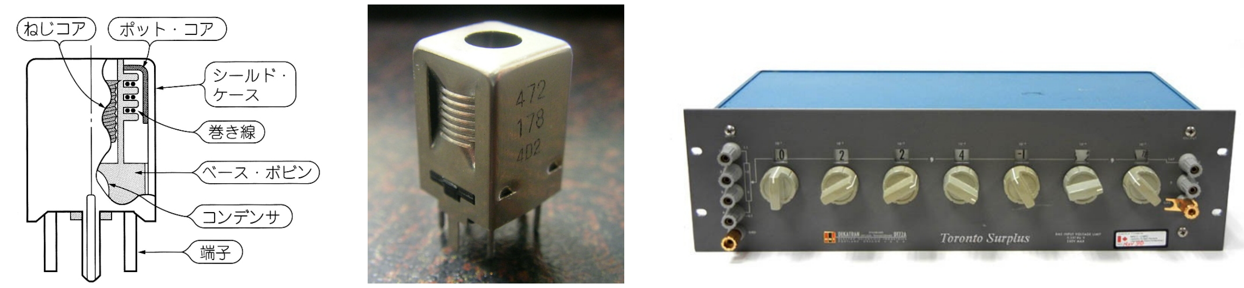
(1.7c) で L を有する素子の代表は，導線をらせん状に巻いた**コイル**である．積層キャパシタでは，金属板電極を櫛の歯状に多層にして入れ子にすることで面積を稼いでいたが，コイルは，やはり円環電流を縦方向に積層することで実効面積を稼いでいると考えることができる．キャパシタは非常に遠方から見れば電気双極子と見ることもできるが，この点からは，インダクタはやはり遠方から見て磁気双極子に見える素子と考えることもできる.

1.7.1　可変インダクタ

キャパシタの (1.9) に相当するコイルのインダクタンス L の表式は

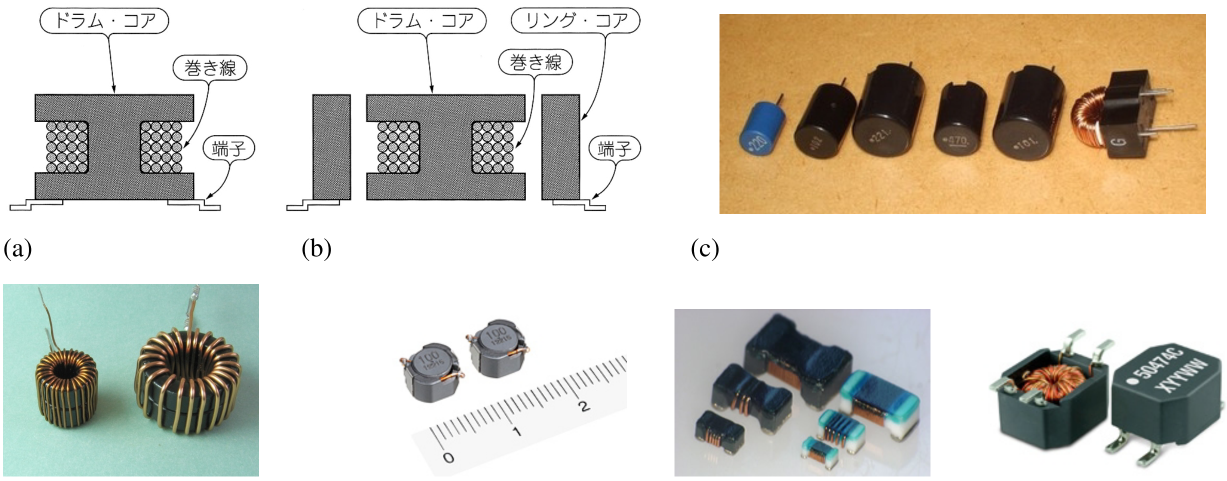
$$L = \mu\frac{N^2}{l}S = \mu nNS \tag{1.10}$$

である．ここで，μ はコイル内物質の透磁率，N は巻き数，l はコイル長，S はコイル断面積，n は線密度である．可変キャパシタでは主に S を変化させていたが，コイルではこれは難しい．一つの方法は，コイル内に磁性体を出し入



(a) (b) (c)

図 1.16　(a) 小型可変インダクタ構造の一例．(b) 外観写真．(c) ディケイドトランスと呼ばれる，ロータリースイッチによるコイル切替器．



(a) (b) (c)

(d) (e) (f) (g)

図 1.17　(a) 開磁路インダクタ．(b) 閉磁路インダクタ．(c) 様々なインダクタ．一番右はトロイダル・コイル．(d) やや大型のトロイダル・コイル．(e) 閉磁路チップインダクタ．(f) 開磁路チップインダクタ．(g) トロイダル・チップインダクタ．

れして有効な μ を変化させることで可変インダクタとする．また，抵抗器同様，ロータリースイッチでコイルを切り替えて高精度・広範囲の可変インダクタとするものもあるが，抵抗器同様の問題がある．

図 1.16 はそのような例を示している．(a), (b) に示した小型のものでは，フェライトにネジが切られており，ケース上からドライバで回転することでフェライトをコイルに出し入れし，インダクタンスを変化させる．(c) はロータリースイッチでコイルを切り替える形式のもので，7 桁の高精度を出すことができる．調整とコイル巻きは職人の技術に頼っているので，最近は高精度のものができなくなりつつある．

1.7.2　固定インダクタ

固定インダクタも，ほとんどは磁性体入りのコイルか，あるいは空芯のコイルである．かつては無線機器のサイズも大きく，トランジスタ回路であってもコイルはそれとわかるものが多かったが，小型化してケースに入れられるようになり，更に面実装用のチップインダクタなって他の部品と区別がつかないものも増えてきた．面実装用のトランスも実用化されている．

特に高密度化によって重要になってきたのが，図 1.17(a), (b) に示した開磁路，閉磁路の違いである．開磁路インダクタは，磁性体で作ったドラムの周りに導線を巻きつけただけのもので，発生磁束の外部漏洩，外部磁束の捕獲が大きく，回路内部のクロストークが問題になる．閉磁路インダクタは，その外側に磁性体の円筒をかぶせた形状をしており，形状も大きくなりコストも上がるが，漏洩磁束は激減し，高密度実装が可能になる．通常の小型固定イン

ダクタは，図 1.17(c) のように，コイル形状から円筒形をしていることが多い．外側の円筒が磁気シールドになっている．

(d) のトロイダル (コア)・コイルは，古くから電源回路などに使用されているが，芯の磁性体，コイルが円環状になっていて，これも磁束漏洩がなく，大きな電流が流れてもノイズを発生しにくい特徴がある．

これらの固定インダクタは，(e) - (g) に示したように様々な方法で面実装用のチップインダクタとして発売されている．

第 2 章 線形回路序論

系を，入力 → 応答，という形で捉える際，応答が入力に比例する線形システムは人間にとって最も取り扱いやすいものである．非線形性の強い系であっても，様々な形で線形としてとりあつかう工夫がなされる．これまで用意した道具立てを使って，線形システムとみなせる電子回路を考え，線形システム一般論を眺めつつ電子回路の線形な取り扱いへと議論を進めていこう．

2.1　線形システムと電子回路

2.1.1　線形システムとは

任意定数 C_1，C_2，変数 x_1，x_2 に対して

$$f(C_1x_1 + C_2x_2) = C_1f(x_1) + C_2f(x_2) \tag{2.1}$$

が成立するとき，関数 f は線形であった．このように変数の 1 次結合を入力したとき，出力が各変数に対する出力の同じ 1 次結合で表されるときに入力 → 出力の関係を線形と呼ぶのであるから，**線形システム** (linear system) とは，図 2.1 のように入力が複数入力の 1 次結合で表されるとき，システムの応答 (出力) がそれぞれの入力への応答の同じ 1 次結合で表されるような系のことを呼ぶ．

2.1.2　伝達関数

改めて，定義をしよう．多くの議論でそうであるように，ここでも時間 t を共通な 1 次元のパラメタとする．システムが，時間 t に依存する入力 $u(t)$ を受け取り，$w(t)$ を出力する，とする．これを，汎関数（あるいは演算子) $\mathscr{R}$ を使って

$$w(t) = \mathscr{R}\{u(t)\} \tag{2.2}$$

と書く．$\mathscr{R}$ の性質として，物理系では次の 2 つが要請される．

不変性　システムの伝達特性が，時間によって変化しないこと．

$$\text{任意の時間 } t_1 \text{ に対して} \quad w(t - t_1) = \mathscr{R}\{u(t - t_1)\} \tag{2.3}$$

因果性　原因 u がない時には，結果 w も現れない．

$$u(t) = 0\ (t < t_1) \ \rightarrow\ w(t) = 0\ (t < t_1)$$

これらの前提の上で，次の**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つ場合，システムは線形である，という．任意の複素定数 C_1，C_2 に対して

$$\mathscr{R}\{C_1u_1(t) + C_2u_2(t)\} = C_1w_1(t) + C_2w_2(t). \tag{2.4}$$

これを，任意数の和の形，

$$\mathscr{R}\left\{\sum_i C_iu_i(t)\right\} = \sum_i C_iw_i(t), \tag{2.5}$$

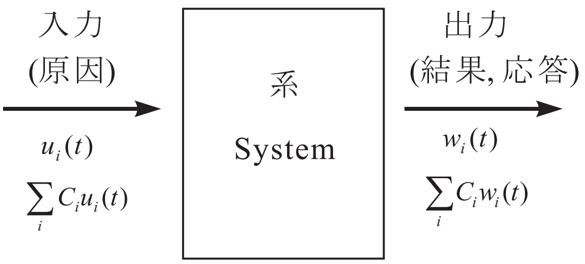


図 2.1　線形システムの概念図．$u_i(t)$ が時間 t に依存する入力，$w_i(t)$ がそれに対応する出力とする．

更に積分形（連続形）

$$\mathscr{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} c(q)u(q,t)dq\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(q)\mathscr{R}\{u(q,t)\}dq \tag{2.6}$$

へと拡張することは容易である．

ここで，連続変数 q を時間そのものに取ってしまったらどうだろうか？すなわち，時間を δt の幅に区切って入力 $u(t)$ を各 δt 区間に対する関数の重ね合わせで表すとする．$|t| \le \delta t/2$ で 1，それ以外で 0 となる関数 $c(t)$ を考え，これを式で表し，$\delta t \to 0$ として積分 (連続) 形で表すと，

$$u(t) = \sum_i u(t_i)c(t-t_i) \quad \to \quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' u(t')c'(t-t')$$

となって，この c' は言わずと知れたデルタ関数 $c'(t-t') = \delta(t-t')$ である．積分形で表した時に高さが 1 でなく無限大の関数 c' になってしまったのは無論，dt' がかかっているからである．式 (2.2) にこれを使い，更に (2.6) を用いると，

$$w(t) = \mathscr{R}\{u(t)\} = \mathscr{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(t')\delta(t-t')dt'\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\mathscr{R}\{\delta(t-t')\}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t,t')dt'. \tag{2.7}$$

となる．ここで，$\xi(t,t')$ は，入力がデルタ関数 $\delta(t-t')$ である時の応答

$$\xi(t,t') \equiv \mathscr{R}\{\delta(t-t')\} \tag{2.8}$$

であり，**インパルス応答** (impulse response) と呼ばれる．$\xi(t,t')$ はまた，重み関数 (weight function) とも呼ばれるが，その理由は式 (2.7) から明らかであろう．

$\delta(t)$ に対する応答を $\xi(t)$ と書くと，(2.3) より，$\xi(t,t_1) = \xi(t-t_1)$ である．(2.7) より，

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t-t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-t')\xi(t')dt' \tag{2.9}$$

となる．これはいわゆるたたみこみ (convolution) である．

ここまで，すべて時間軸上 (時間領域) で話を進めてきたが，周波数空間で考えることもできる．この 2 つの空間における事象表現は，**フーリエ変換** (Fourier transform) で結ばれている．すなわち，時間領域での事象表現を $x(t)$，その周波数領域での表現を $X(\omega)$ とすると，

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{2.10}$$

である．関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を $X(\omega) = \mathscr{F}\{x\}$ のように表し，$U(\omega) = \mathscr{F}\{u(t)\}$，$W(\omega) = \mathscr{F}\{w(t)\}$，$\Xi(\omega) = \mathscr{F}\{\xi(t)\}$ とする．(2.9) の両辺のフーリエ変換を取ると，

$$W(\omega) = U(\omega)\Xi(\omega) \tag{2.11}$$

となる．この時，$\Xi(\omega)$ をこのシステムの**伝達関数** (transfer function) という．

これはある意味では，一定周波数 ω の入力に対する出力の性質を調べたもの，と考えることができる．この時は無限の過去から未来へ一定周波数で振動する入力を考える必要があった．フーリエ変換と類似の積分変換にラプラス (Laplace) 変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \tag{2.12}$$

が存在する．無限の過去ないし未来を考えると，関数自身が発散して手に負えないため，適当なカットオフを入れる必要があるが，今の場合どこに入れても同じなので，扱いやすい $t = 0$ に入れたものである．そこで同様に，入力 $u(t)$ として $t < 0$ でゼロであるもののみを考える．すると，(2.9) のたたみこみは，

$$w(t) = \int_0^{\infty} u(t')\xi(t-t')dt' \tag{2.13}$$

と書くことができる．$x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}\{x(t)\}$ のように表し，$W(s)=\mathscr{L}\{w(t)\}$, $U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}$, $\Xi(s)=\mathscr{L}\{\xi(t)\}$ とすると，(2.13) の両辺のラプラス変換を取って

$$W(s)=U(s)\Xi(s) \tag{2.14}$$

と，(2.11) と同型となる．この $\Xi(s)$ も伝達関数と呼ばれる．ラプラス変換は，フーリエ変換のような直交関数系展開係数の形をしていないので簡明な物理的意味付けができないが，インパルス入力に対して緩和 (減衰) 定数 s (時定数 s^{-1}) で緩和する線形系での入力出力の関係を示していると見ることもできる．

更に，s を複素平面へ拡張することを考え，$s\to\sigma+i\omega$ とする．$u(t)$ として $t\geq 0$ でのみゼロでないものを考えると，(2.14) の積分の下限を $-\infty$ に取っても発散することはなくなり，これを使うと，フーリエ変換 (2.10) も同形式になるため，「伝達関数」の表式として (2.14) を共通に使用することができる．特に周波数応答が欲しい場合は，$s=i\omega$ とすれば良い．以下，周波数応答であることを明示するためには，例えば $W(i\omega)$ のように書くことにする．

2.1.3 システムの電子回路表現とインピダンス

式 (1.7) を，V_{12} を出力，I_{12} を入力と考えて

$$w(t)=Ru(t),\quad w(t)=L\frac{du(t)}{dt},\quad w(t)=\frac{1}{C}\int^t u(t')dt' \tag{2.15}$$

と書くことができる．すなわち，(1.7) の 3 つの受動素子は，このようなシステムの具体的な表現と考えることができる．これをこれらはこのようなシステムの**等価回路** (equivalent cirquit) である，と表現することがある．

(2.15) の 3 つの演算子，R，$L(d/dt)$，$(1/C)\int^t dt'$ は，(2.3)，(2.4) を満たしているから，これらは線形システムである．従って s-空間において，応答関数が定義できる．周波数応答を考えることにして $s=i\omega$ についてそれぞれ計算すると，

$$\text{抵抗器}:\Xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\left[R\delta(t)\right]dt=R, \tag{2.16a}$$

$$\text{インダクタ}:\Xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\left[L\frac{d}{dt}\delta(t)\right]dt=i\omega L, \tag{2.16b}$$

$$\text{キャパシタ}:\Xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{C}\int^t\delta(t')dt'\right]dt=\frac{1}{i\omega C}. \tag{2.16c}$$

(2.11) より，

$$W(i\omega)=RU(i\omega),\quad W(i\omega)=i\omega LU(i\omega),\quad W(i\omega)=\frac{1}{i\omega C}U(i\omega) \tag{2.17}$$

である．電圧，電流の関係に戻り，$I(i\omega)=\mathscr{F}\{I_{12}(t)\}$，$V(i\omega)=\mathscr{F}\{V_{12}(t)\}$ とすると，

$$V(i\omega)=Z(i\omega)I(i\omega), \tag{2.18}$$

と，オーム則 (Ohm's law) 形式になる．ただし，

$$\text{抵抗器}:Z(i\omega)=R, \tag{2.19a}$$

$$\text{キャパシタ}:Z(i\omega)=\frac{1}{i\omega C}, \tag{2.19b}$$

$$\text{インダクタ}:Z(i\omega)=i\omega L \tag{2.19c}$$

である．$Z(i\omega)$ を 2 端子素子の周波数 ω に対する**インピダンス** (impedance) と呼ぶ．インピダンスの逆数 $Y(i\omega)\equiv 1/Z(i\omega)$ を**アドミタンス** (admittance) と呼ぶ．

参考文献

[1] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 2004).

[2] N. W. Ashcroft and D. Mermin, *Solid State Physics* (Thomson Learning, 1976).

[3] 霜田光一，「エレクトロニックスの基礎」(裳華房，1963).

[4] 薊 利明，竹田俊夫，「わかる電子部品の基礎と活用法」 (CQ 出版社，1996).

[5]「コンデンサ/抵抗/コイル活用入門—電子回路の性能を決める受動部品の基礎と応用」 (トランジスタ技術 SPECIAL) (CQ 出版社，2005).

[6]「抵抗&コンデンサ活用ノート」 (トランジスタ技術 SPECIAL) (CQ 出版社，2008).