

# 物理屋のための電子回路論 第4回

勝本信吾

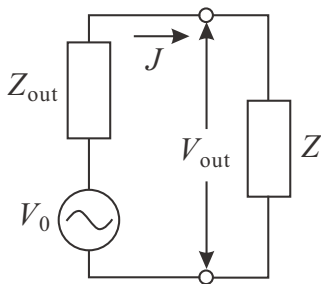
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2018年10月16日

## 3.2 2端子対受動素子回路

次に、端子対数を2個として受動素子で4端子回路を形成した場合の特徴を考え、有用な概念を導入しておこう。2端子対回路の場合、「信号伝送路」としての使用が多くなる。このような伝送回路概念による取り扱いは、物理実験上も有用なことが多い。

### 3.2.1 インピーダンスの整合



2端子対回路に入る前に、ひとつ極めて重要で一般的な概念を導入しておこう。一般の電源を定電圧理想電源と出力インピーダンス  $Z_{out}$  の組み合わせの等価回路で考える。電圧、電流を複素数表示で考え、理想電源の電圧を  $V_0(i\omega)e^{i\omega t}$  等と表すと、出力端子に生じる電圧  $V_{out}(i\omega)$  は、

$$V_{out}(i\omega) = V_0(i\omega) - Z_{out}(i\omega)J(i\omega).$$

この時、出力端子に付けた負荷  $Z$  によって消費される有効電力  $P$  は、 $J = V_0/(Z + Z_{out})$ , (2.24) より

$$P = \text{Re}(V_{out}^* J) = \text{Re} \left( \frac{Z^* V_0^*}{Z^* + Z_{out}^*} \frac{V_0}{Z + Z_{out}} \right) = \frac{|V_0|^2}{|Z + Z_{out}|^2} \text{Re}(Z)$$

となる。 $P$  を  $Z$  の実部虚部それぞれについて停留点をとることにより、 $P$  の最大値  $P_{max}$  は

$$P_{max} = \frac{|V_0|^2}{4\text{Re}(Z_{out})^2} \tag{3.16}$$

で、これは

$$Z = Z_{out}^* \tag{3.17}$$

の時に得られることがわかる。これをインピーダンス整合 (impedance matching) と呼び、この時電源能力が最も効率的に負荷に引き出される。

(3.17) は、負荷インピーダンスが抵抗部分は一致し、リアクタンス部分は符号が反転していることを規定している。リアクタンス部分は、2.2.2 項で見たように電源と負荷との間でエネルギーを循環させている部分に相当するから、ちょうど符号が反転、すなわち位相が  $180^\circ$  回することで、エネルギーの押し引きのタイミングを一致させ出力インピーダンス側で余計なエネルギーロスを発生しないような条件であることがわかる。

分布定数回路のところで述べるように、信号周波数が高くなり伝送路が長くなると伝送路が持つ特性インピーダンスが重要になる。伝送路の特性インピーダンスを  $Z_0$  とすると、反射が消失する条件をしばしば

$$Z = Z_0 \tag{3.18}$$

と書く。これは、特性インピーダンスの虚部は、2端子素子のインピーダンスとは異なり伝送路に減衰があることを示し、伝送信号特性を決めるのは実部であるため実際問題虚部を問題にしないためである。

### 3.2.2 伝達関数の極とボード線図

ボード線図が良く使用される理由の1つとして、それぞれのコンポーネントに対して容易に測定が可能であることが挙げられる。すなわち、交流信号源を用意し、出力を測定することで虚軸上での伝達関数の振幅と位相を知ることができる。伝達関数  $\Xi(s)$  の一般形を、(3.12) のインピーダンスと同様に

$$W(s) = B \frac{(s - \beta_1) \cdots (s - \beta_m)}{(s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)} \quad (3.19)$$

と書く。インピーダンスの場合の自然電流のように入力为零になった後も出力が存在する場合、その時刻における応答係数は無限大でなければならないから、このような出力は(3.19)の極から発生している。系が安定であるためには、 $W(s)$ の極が虚軸上あるいは左半面になければならないことは、受動素子回路のインピーダンスについての議論と同様である。(3.19)を虚軸で切って周波数応答  $W(i\omega)$  としたものの絶対値の対数、およびその複素角は

$$\log |W(i\omega)| = \log |B| + \sum_{j=1}^m \log |i\omega - \beta_j| - \sum_{j=1}^n \log |i\omega - \alpha_j|, \quad (3.20a)$$

$$\arg(W(i\omega)) = \arg(B) + \sum_{j=1}^m \arg(i\omega - \beta_j) - \sum_{j=1}^n \arg(i\omega - \alpha_j) \quad (3.20b)$$

となる。

このような伝達関数について、ボード線図がどのようなになるか、見てみよう。実軸上の極は入力がゼロに落ちた後単調減衰する出力に対応するが、このような極を持つ伝達関数の簡単な例として

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.21)$$

を考える。 $\arg[W(i\omega)] = -\arg(1+i\omega)$  を  $\theta$  と置くと、 $\theta$  は極  $-1$  から虚軸上の点  $i\omega$  を望む角の符号を反転したもので、 $\omega: 0 \rightarrow +\infty$  で  $0$  から  $-\pi/2$  まで変化する。 $\log \omega = x$  と置くと

$$\frac{d\theta}{d(\log \omega)} = -\frac{e^x}{e^{2x} + 1}, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$$

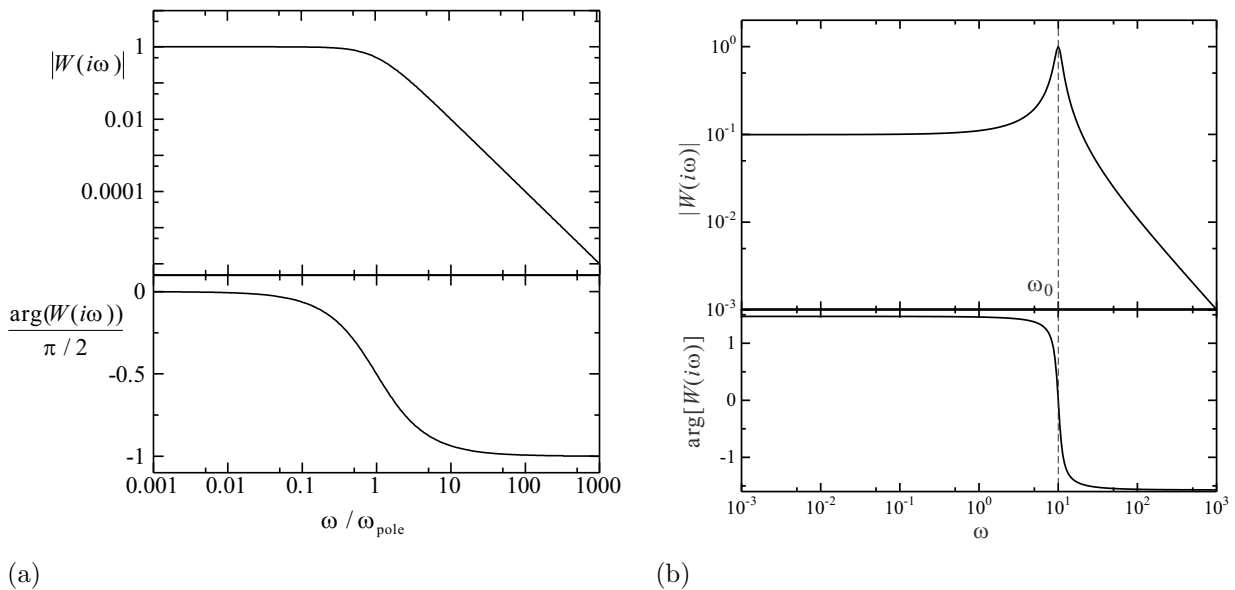


図 3.8 (a) 実軸上に単極がある伝達関数(式(3.21))のボード線図。(b) 共鳴点を表す極  $(-1 + i\omega_0, \omega_0 = 10)$  がある場合(式(3.22))のボード線図。

となる.  $x \rightarrow \pm\infty$  で  $d\theta/dx$  は 0 である. また,  $x = 0$  すなわち  $\omega = 1$  で  $d^2\theta/dx^2 = 0$  となって変曲点となる. 以上から図 3.8(a) の下のような図が得られる. 同様に

$$\frac{d(\log |W(i\omega)|)}{d(\log \omega)} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad \frac{d^2(\log |W|)}{dx^2} = -\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}, \quad \frac{d^3(\log |W|)}{dx^3} = -4\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{(1+e^{2x})^3}$$

となり,  $x \rightarrow \pm\infty$  で  $d(\log |W|)/dx$  は 0,  $-1$  で途中で折れ曲がりが生じ, その位置は,  $d^2(\log |W|)/dx^2$  の絶対値が最大となる ( $d^3(\log |W|)/dx^3 = 0$ )  $\omega = 1$  であることがわかる. このように, 実軸上あるいはそれに近いところに極がある場合, 極から  $i\omega$  を望む角が  $\pi/4$  となる付近で  $\log |W|$  の傾きは  $0 \rightarrow -1$  と変化し,  $W$  の複素角は全体として  $-\pi/2$  だけ変化する中間点で最も変化が急になるところである.

次に, 虚部が有限な場合の極の影響を見るために仮想的に

$$W(s) = \frac{1}{s+1-i\omega_0} \quad (\omega_0 > 0) \quad (3.22)$$

という伝達関数を考えてみる\*1. これは, 系が固有周波数  $\omega_0$  を持つ場合に相当する.  $\omega_0 = 10$  とした場合のボード線図は, 図 3.8(b) のようになる.

$$|W(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega-\omega_0)^2}}, \quad \arg[W(i\omega)] = -\arctan(\omega-\omega_0)$$

より,  $|W(i\omega)|$  が  $\omega = \omega_0$  でピークを持ち,  $\arg[W(i\omega)]$  は  $-\arctan(-\omega_0)$  から  $-\pi/2$  まで変化する.  $\omega_0 \gg 1$  であれば上限は  $\pi/2$  で全体の変化の幅は  $\pi$  という共鳴の一般的な性質を表している.

### 3.2.3 影像パラメタ

図 3.9(a), (b) のように, 端子対 1 側にインピーダンス  $Z_1$ , 2 側にインピーダンス  $Z_2$  を接続した時, 端子対 1 側から見た回路全体のインピーダンスが  $Z_1$ , 端子対 2 側から見た回路全体のインピーダンスが  $Z_2$  になる時,  $Z_1, Z_2$  をこの 4 端子回路の**影像インピーダンス** (image impedance) という. この状態では, 端子対 1 から見ると両側のインピーダンスが  $Z_1$ , 端子対 2 から見ても両側のインピーダンスが  $Z_2$  で共通していることになる. すなわち, 両端子対で信号の意味でインピーダンス整合が取れた状態 (3.32) を仮定している. この場合, 2つの端子対で信号の反射は生じない.

以上のような状況を生じさせるための 4 端子パラメタの条件を調べる. 図 3.9 は端子対 2 側の  $J$  の取り方が F 行列とは逆向きであるから, F パラメタを用いると,

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BJ_2, \\ J_1 &= CV_2 - DJ_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

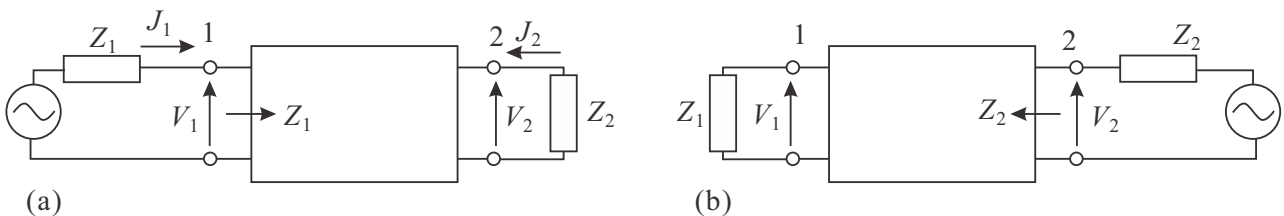


図 3.9 4 端子回路での影像インピーダンスの説明. 交流電流源は駆動点を示すために記入したもので, 内部抵抗はゼロでエネルギー湧き出しを除けば短絡と同じ. (直列インピーダンスと合わせて, 内部インピーダンスを持つ電源と見ても良い.) (a) は端子 1 から 4 端子回路を見た場合, インピーダンスは  $Z_1$ , 端子 1 に接続された負荷も  $Z_1$  である. (b) は, 端子 2 側から見ても同様であることを示す.

\*1 「仮想的」というのは, 伝達関数の極は共役複素数対として現れるので本来  $-1-i\omega$  にも極を持つからである. ここではこちらの極の影響は無視して考えている.

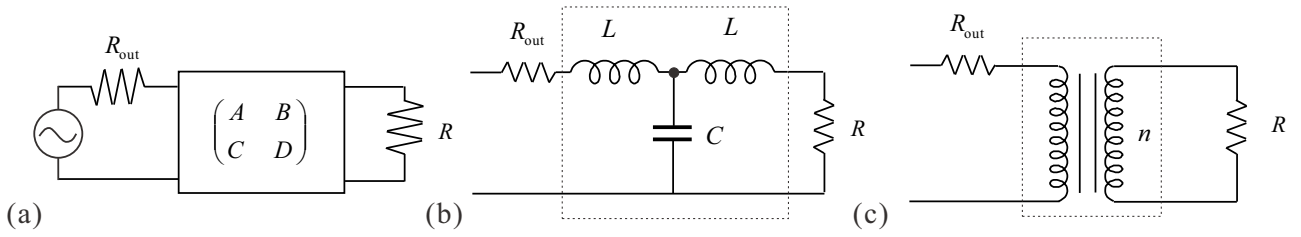


図 3.10 電源と負荷の間に 4 端子回路を挿入することでインピーダンス整合を取る. (a) 問題の状況を示したものの. (b) キャパシタ, インダクタを使った整合. (c) マッチングトランス.

である.  $V_2 = -J_2 Z_2$  より,

$$Z_1 = \frac{V_1}{J_1} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}. \quad (3.24)$$

端子対 2 について同様に

$$Z_2 = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A} \quad (3.25)$$

であるから,  $A, B, C, D$  がいずれもゼロでないとすると,

$$Z_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{DB}{CA}} \quad (3.26)$$

である. また, 図 3.9(a) のように端子対 1 に電源を接続して電圧  $V_1$  を印可し, 端子対 2 に  $V_2$  が現れたとすると,

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{A}{D}}(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}), \quad \frac{J_1}{-J_2} = \sqrt{\frac{D}{A}}(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad (3.27)$$

となる. ここで,

$$e^\theta \equiv \sqrt{\frac{V_1 J_1}{-V_2 J_2}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} \frac{J_1}{-J_2}} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1} \frac{V_1}{V_2}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \quad (3.28)$$

で定義される  $\theta$  をこの 2 端子対回路の**映像伝送量** (image propagation constant) と呼ぶ.  $\theta$  は, 端子 2 から電圧を印可する条件下 (図 3.9(b)) でも同じ値が得られる.

$\theta = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) と書くと,

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{V_1 J_1}{V_2 J_2} \right|, \quad \beta = \frac{1}{2} \arg \left[ \frac{V_1 J_1}{-V_2 J_2} \right] \quad (3.29)$$

である.  $\alpha$  を**映像減衰定数** (image attenuation constant),  $\beta$  を**映像位相シフト** (image phase shift) と呼ぶ.

また, 以上の定義から逆に, F パラメタを  $Z_1, Z_2, \theta$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \cosh \theta, & B &= \sqrt{Z_1 Z_2} \sinh \theta, \\ C &= \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \sinh \theta, & D &= \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \cosh \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

と表すことができる. このことから, 線形なパラメタではないが,  $Z_1, Z_2, \theta$  を**映像パラメタ** (image parameter) と呼ぶ.

### 3.2.4 4 端子回路によるインピーダンス整合

出力抵抗と負荷抵抗が異なっている場合に, これらの間に 4 端子回路を付加することによってエネルギーの損失なしにインピーダンス整合を取る方法を考える. 出力抵抗や負荷抵抗にリアクタンス成分があると, インピーダンス整合の定義が電力・信号で (3.17), (3.18) のように変化して面倒なので図 3.10(a) のようにこれらにはリアクタンス成分がなく, それぞれ抵抗成分  $R_{out}, R$  だけである場合を考える.

影像インピーダンスの項で最初に述べた条件下で、 $R_{\text{out}} = Z_1$ ,  $R = Z_2$  となれば良いわけだが、一旦 (3.24), (3.25) まで戻って、

$$R_{\text{out}} = \frac{AR + B}{CR + D}, \quad R = \frac{DR_{\text{out}} + B}{CR_{\text{out}} + A} \quad (3.31)$$

である。これより、整合が取れるための F パラメタの条件を

$$CDR_{\text{out}}^2 - AB = 0 \quad (3.32)$$

と書くことができる。

(i)  $ABCD \neq 0$  の場合は (3.26) と同じであり、

$$R_{\text{out}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad R = \sqrt{\frac{BD}{AC}}. \quad (3.33)$$

(ii)  $A = D = 0$  の場合にも解が考えられ

$$RR_{\text{out}} = B/C \quad (3.34)$$

となれば良い。例えば、電源の振動数を  $\omega$  とすれば、図 3.10(b) のような回路で  $\omega L = (\omega C)^{-1} = \sqrt{RR_{\text{out}}}$  とすれば良い。この方法は振動数によるので、単一振動数の電源にしか使えない。

(iii)  $B = C = 0$  の場合。

$$R_{\text{out}}/R = A/D \quad (3.35)$$

である。これはリアクタンスのみで一種の電圧増幅を行っているの、これにはトランスが必要である。巻き数比  $n$  を

$$n = \sqrt{R/R_{\text{out}}} \quad (3.36)$$

とすれば良い。これは理想的には電源振動数に依存しないので、マッチングトランスとして広く使われている方法である (図 3.10(c)).

### 3.2.5 波形伝送の忠実性と歪

フィルターの議論をするにあたって線形回路を信号が伝送される場合の歪についてごく一般的な議論をしておこう。入力  $u(t)$ , 出力  $w(t)$  の線形応答系 ( $U(i\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ ,  $W(i\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$ ) が、信号波形に変更を加えない単純で忠実な伝送系であり振幅係数  $A_0$ , 時間遅れ  $\tau_0$  であったとすると、

$$w(t) = A_0 u(t - \tau_0) \quad \therefore W(i\omega) = A_0 e^{-i\omega\tau_0} U(i\omega) \quad (3.37)$$

であるから、伝達関数  $\Xi(i\omega)$  は

$$\Xi(i\omega) = A_0 e^{-i\omega\tau_0} \quad (3.38)$$

となり、ボード線図上に描かれる 2 つの量は

$$|\Xi(i\omega)| = A_0, \quad \arg[\Xi(i\omega)] = -\omega\tau_0 \quad (3.39)$$

のように、振幅は定数、位相は周波数に対して一定の負の傾きを持つ。逆にこれらが満たされれば、(3.37) のように信号が無歪で伝達される。第一の条件は、振幅係数 (透過係数) が周波数によらない、すなわち、周波数フィルター作用がないことを指定している。第二の条件は、

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (\phi(\omega) = \arg[\Xi(i\omega)]) \quad (3.40)$$

が  $\omega$  に対して一定であることを指定している。この  $\tau(\omega)$  を群遅延 (group delay) と呼ぶ。群遅延が一定ということとはすなわち、この回路を伝播する際の一種の群速度が  $\omega$  に対して一定で分散がないことに相当する。

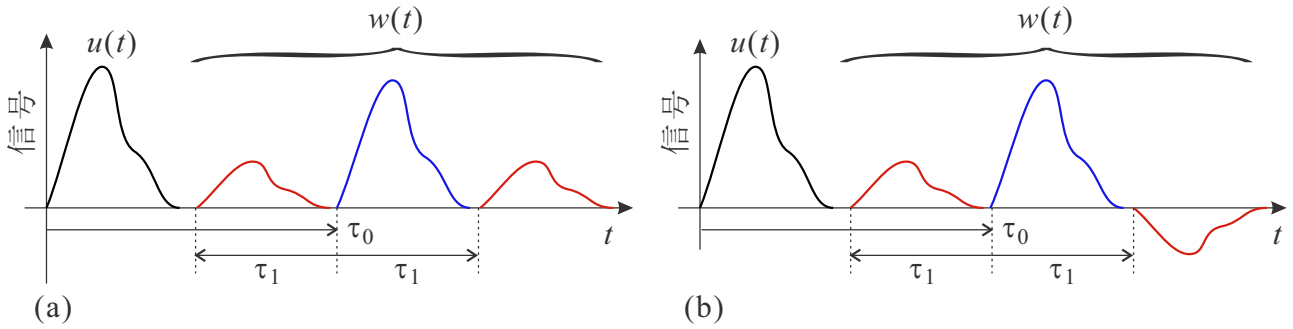


図 3.11 それぞれ、正弦波状の (a) 振幅歪, (b) 遅延歪 が存在する伝送回路の入力  $u(t)$  と出力  $w(t)$  の模式図。青線で示した無歪の主信号出力の前後に赤線で示した対エコーが発生している。

(3.39) の条件から、線形伝送回路を通過する際の信号歪について 2 種類に分類することができる。ひとつは、振幅係数  $A_0$  が  $\omega$  依存性を持ってしまう場合で、**振幅歪** (amplitude distortion) と呼ばれる。もうひとつは、群遅延  $\tau(\omega)$  が  $\omega$  依存性を持って平均値  $\tau_0$  からずれる効果によるもので**遅延歪** (delay distortion) と呼ばれる。

まず、正弦波状の振幅歪

$$A(\omega) = a_1 \cos(\tau_1 \omega) + a_0, \quad \phi(\omega) = -\tau_0 \omega \quad (3.41)$$

が加わった場合を考える\*2。sin 成分は  $\omega$  積分で消える。

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) U(i\omega) e^{i(\omega t + \phi(\omega))} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega U(i\omega) \{a_1 \cos(\tau_1 \omega) + a_0\} e^{i\omega(t - \tau_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega U(i\omega) \left[ a_0 + \frac{a_1}{2} (e^{i\tau_1 \omega} + e^{-i\tau_1 \omega}) \right] e^{i\omega(t - \tau_0)} \\ &= a_0 u(t - \tau_0) + \frac{a_1}{2} [u(t - \tau_0 + \tau_1) + u(t - \tau_0 - \tau_1)] \quad (3.42) \end{aligned}$$

となるので、図 3.11(a) のように、 $\tau_0$  の遅延を持った信号の時間軸上で  $\pm\tau_1$  だけずれた位置に同じ形状の信号が現れる。これを**対エコー** (paired echo) と呼ぶ。

次に、正弦波状の遅延歪

$$A(\omega) = A_0, \quad \phi(\omega) = -\tau_0 \omega + b_1 \sin(\tau_1 \omega) \quad (3.43)$$

を考える。cos 成分は実入力に対して虚数出力を出してしまうため、電子回路では発生し得ない特性である。指数関数を 1 次まで展開して

$$\exp[ib_1 \sin(\tau_1 \omega)] \approx 1 + \frac{ib_1}{2i} (e^{i\tau_1 \omega} - e^{-i\tau_1 \omega})$$

として、出力は

$$w(t) = A_0 [u(t - \tau_0) + \frac{b_1}{2} \{u(t - \tau_0 + \tau_1) - u(t - \tau_0 - \tau_1)\}] \quad (3.44)$$

となり、やはり対エコーが生じるが、図 3.11(b) のように  $\tau_1$  だけ遅れて現れる後行エコーの符号が反転している。

### 3.2.6 フィルター回路

フィルター (filter) 回路は、信号の内からある条件を満たすものを選び取るもので、電子回路中至る所に使われ、物理実験の上でもフィルターの知識は有用であることが多い。本章の主題である周波数軸上でのフィルターの働きは、図 3.12 のように大別することができる。

フィルターは入力と出力が考えられそれぞれ端子対で表現されるから、2 端子対 (4 端子) 回路表現が適当である。図 3.12 の縦軸を単に「透過係数」としている。第 1 回の講義で見たように電気信号を表す物理量として電圧を使用

\*2 これは、信号論で述べる予定の振幅変調 (amplitude modulation, AM) が搬送波に加わった場合の時間軸を周波数軸に一種の双対変換したもので、時間軸上のエコーが周波数軸の側波帯に相当する。

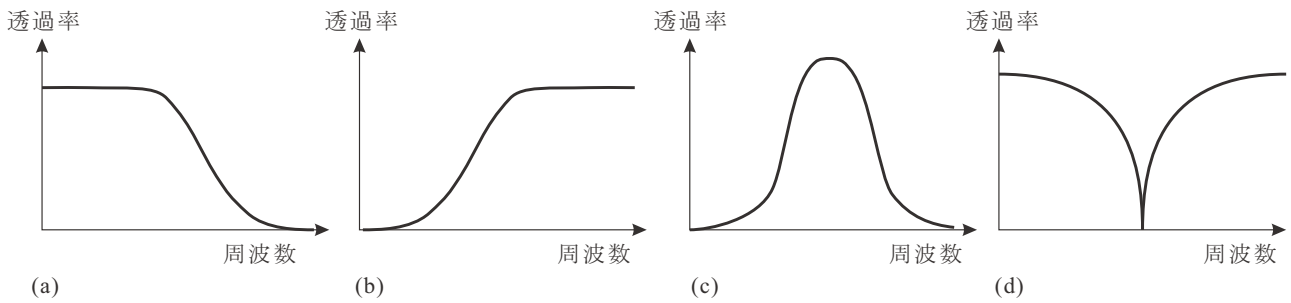


図 3.12 (a) ローパスフィルター, (b) ハイパスフィルター, (c) バンドパスフィルター, (d) ノッチフィルター

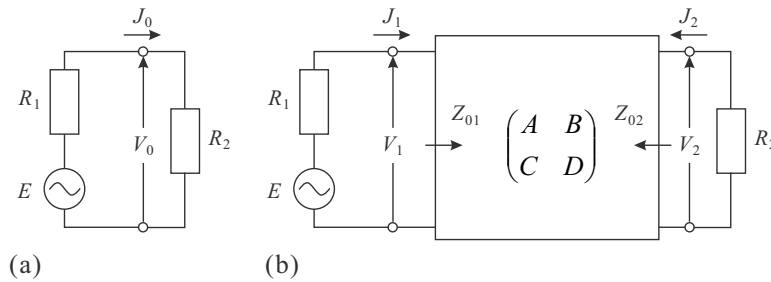


図 3.13 (a) 出力抵抗  $R_1$  の電源, 負荷抵抗  $R_2$  が直接接続された状態. (b) 映像インピーダンス  $Z_{01}$ ,  $Z_{02}$  の 2 端子対回路を挿入した状態.

することが多いため透過係数  $T$  としては, 入力信号電圧振幅  $V_1(i\omega)$  と出力信号電圧振幅  $V_2(i\omega)$  の比

$$T(i\omega) \equiv \frac{V_2(i\omega)}{V_1(i\omega)} \quad (3.45)$$

を使用することが多い\*3. が, もちろん, これは信号をどのような形で伝送するか依存し, 電流振幅の比  $J_2(i\omega)/J_1(i\omega)$  を透過係数に取る場合や電力の比を取る場合もある.

(3.45) の自然対数を取って

$$\log T = \log |T| + i \arg T = -\alpha - i\beta \quad (3.46)$$

として,  $\alpha$  を減衰 (attenuation),  $\beta$  を位相 (phase) と呼ぶ.

フィルター回路の意味合いから (出力量)/(入力量) を透過係数, あるいは伝送回路分野の好みに合わせると「伝送係数」と呼ぶのが自然であるが, 特に和書では (入力量)/(出力量) を伝送係数 (transmission coefficient) と呼ぶことが多く, 単なる用語の問題であるが, 注意が必要である. ここでは, 動作伝送係数 (square root power transmission coefficient) を導入しておく. この伝送係数は, 和書に合わせて (入力量)/(出力量) で定義している. 図 3.13(a) のように電源と負荷を接続し, 負荷へ輸送される有効電力を  $P_0$  とする. この接続端子部分に (b) のように 4 端子回路を挿入した時に負荷に与えられる電力を  $P_2$  とする. この時, 動作伝送係数は

$$S_B \equiv \sqrt{\frac{P_0}{P_2}} = \frac{R_2 A + B + C R_1 R_2 + D R_1}{2\sqrt{R_1 R_2}} \quad (3.47)$$

と定義される.

このような伝送係数のことを, また利得 (gain) と呼ぶこともある. 利得は通常は 1 以上, すなわち信号振幅が大きくなる (増幅される) 場合に使用される用語であるが, 特にフィルター回路の場合は, 1 以下でも良く使用される. 利得は比であるから物理的な次元がないが, 対数を取ってその大きさを表すことが多い (ボード線図で振幅や係数を対数プロットすることに対応). そこで, 10 を底とする対数を取って対数軸上での 1 を, 電話の発明者 Graham Bell の名を取って 1 Bel のように称する. 略記号は B である. が, 実際にはこの 1/10 目盛りのデシベル (dB) が圧倒的

\*3 これは, 量子力学でトンネル現象などを議論する際には複素透過係数と呼ばれる量に相当する.

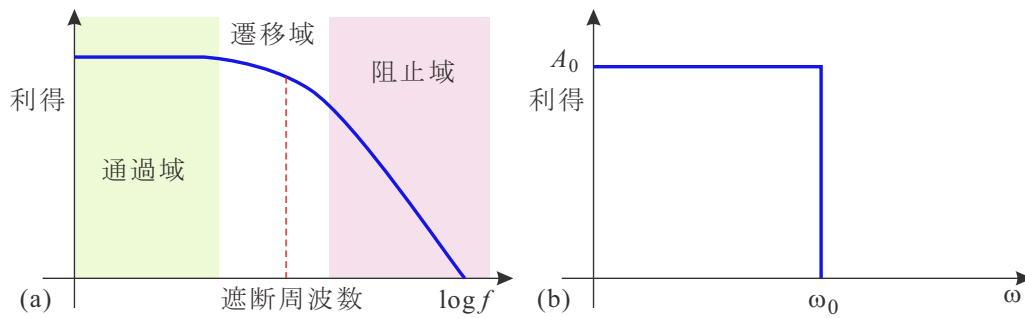


図 3.14 (a) フィルター特性について周波数空間で使用される用語について示したもの. (b) 理想ローパスフィルターの仮想的な利得の周波数依存性.

に使用される. 入力信号電力が  $P_{in}$ , 出力信号電力が  $P_{out}$  である時, 増幅度が  $G_f$  dB である, というのは

$$G_f = 10 \log_{10} \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (3.48a)$$

を意味する. 入力抵抗と出力抵抗が等しい場合には

$$G_f = 20 \log_{10} A = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (3.48b)$$

となる.

電気回路では, 電力や電圧の絶対値も dB に文字を付けた記号で表し, 混同しやすいので注意が必要である. いずれも基本的な定義の仕方は上記と同じである. 電力の場合 1mW を基準 ( $P_{in}$ ) に, (3.48a) の式で定義した電力を dBm, 同様に 1fW を基準にした電力を dBf で表す. 一方, 電圧は, 1V を基準に (3.48b) で定義した電圧を dBV, 同様に  $1\mu V$  を基準にしたものを dB $\mu$  で表す. 10 を底とする対数による dB に対し, 自然対数を用いて比を表す場合, ネーパー (neper, Np) <sup>\*4</sup> という表記も使用されるそうであるが, 講師は見たことがない.

周波数軸上では, 図 3.14(a) に示したような用語が使用される. 利得が一定で信号形状が変わらずに通過する **通過域** (pass band), 利得が周波数に対して変曲点を持つ **遷移域** (transient band) (遷移域は無視する場合が多い), 利得が大きく落ちる **阻止域** (stop band), また, 変曲点の周波数を **遮断周波数** (cut-off frequency) という. 図 3.14(b) のように, 階段関数の周波数特性を持つフィルターを考える. 伝達関数は次のようになる.

$$\Xi(i\omega) = A_0 H(\omega_0 - |\omega|) \quad (3.49)$$

$H(x)$  はヘヴィサイド関数,  $A_0$  は実数, すなわち  $\Xi(i\omega)$  の位相はゼロである. このようなフィルターを **理想ローパスフィルター** (ideal low pass filter) と呼ぶ. (3.49) は定義より,  $t = 0$  にデルタ関数の入力があった場合の応答関数のフーリエ変換である.

すなわち, 入力  $u(t) = \delta(t)$  に対する応答  $w(t)$  は

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\omega_0}^{\omega_0} A_0 e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = A_0 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{d\omega}{2\pi} \cos \omega t \\ &= 2A_0 f_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} = 2A_0 f_0 \text{sinc}(2f_0 t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる. ここで,  $f_0 \equiv \omega_0/2\pi$  で,  $\text{sinc}(x)$  は

$$\text{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (3.51)$$

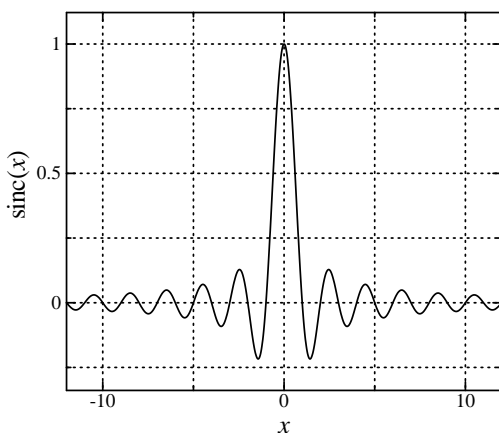


図 3.15 sinc 関数

<sup>\*4</sup> 対数の発見者 John Napier の名前からとったもの.



で定義される関数\*5で, sinc 関数と呼ばれ, 窓関数

$$P_{\pi/\tau}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau}, \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{\tau} \end{cases} \quad (3.52)$$

をフーリエ変換したものである. 物理の学生諸君には, 不確定性関係やスリットを通過する波の回折を考える際に良く現れる関数としておなじみであろう.

しかし, 実際に (3.50) のような応答があるとすると, 入力がある  $t = 0$  よりも先に出力が現れていることになり, 線形応答系的前提条件として置いた因果律を破っていることになる. ここでは, 通常の電子回路では因果律が成立している, とする. すると, 理想ローパスフィルターに関して置いた前提, (3.49) が  $A_0$  が実数で位相ゼロ, すなわち遅延がゼロであることも含めて実現不可能なものであった, ということになる. 理想ローパスフィルターは, 通過域については振幅歪, 遅延歪とも全くなく, 阻止域の信号は一切通さないもので確かに「理想」であるが, いかに高性能な素子を用いても達成不可能なものである.

それでは, どのような特性なら可能か, ということで, 次項でひとつの例を紹介するが, フィルター伝達関数として可能な数学形式によりいくつかの種類が考えられ, 代表的な特性については, 付録 D にリストアップされている.

### 3.2.7 K 定数型フィルター

図 3.16(a) の回路で,  $Z_1$  と  $Z_2$  との間に

$$Z_1 Z_2 = R^2 \quad (3.53)$$

の関係式が成立するとき, これを K 定数型フィルター (constant K type filter) と呼ぶ. ただし,  $R$  は周波数依存性のない定数であり, 最初にこのフィルターの議論をした Zöbel が  $R^2$  を  $K$  と置いていたため, この不思議な名称がついた.

最も簡単な, 図 3.16(b) の場合を考えると,  $Z_1 = i\omega L$ ,  $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$  であるから, (3.53) より

$$Z_1 Z_2 = \frac{L}{C} = R^2 \quad \therefore \sqrt{\frac{L}{C}} = R \quad (3.54)$$

である. 映像パラメタを求めると

$$Z_{01} = R\sqrt{1 - \omega^2 LC}, \quad Z_{02} = \frac{R}{\sqrt{1 - \omega^2 LC}}, \quad \coth \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2 LC}} \quad (3.55)$$

である. この  $R$  は名目インピーダンス (nominal impedance) と呼ばれる量である. インピーダンスをこの  $R$ , 周波数を共鳴周波数  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  で規格化して,  $\Omega \equiv \omega/\omega_0$  と書くと,

$$z_{01} = \frac{Z_{01}}{R} = \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad z_{02} = \frac{Z_{02}}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad \coth \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}} \quad (3.56)$$

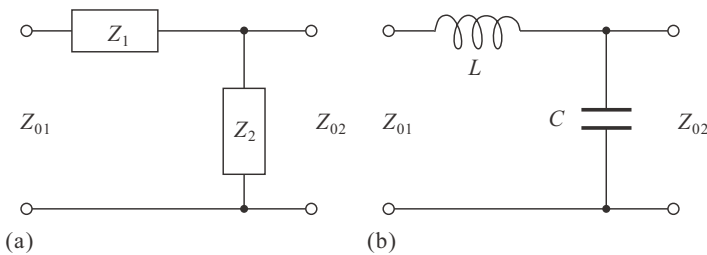


図 3.16 (a) 定 K 型フィルターの一般的形式.  
(b) L と C で構成した例.

\*5 これは, 正規化 sinc 関数と呼ばれ, 信号処理などで良く使用される定義である. 数学では非正規化 sinc 関数  $\sin x/x$  を sinc 関数と呼ぶことが多い.

である。

(3.29) のように、 $\theta = \alpha + i\beta$  なので、

$$\cosh(\alpha + i\beta) = \cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta = \sqrt{1 - \Omega^2}$$

となって、 $\Omega$  と 1 の大小により次のように分類される。

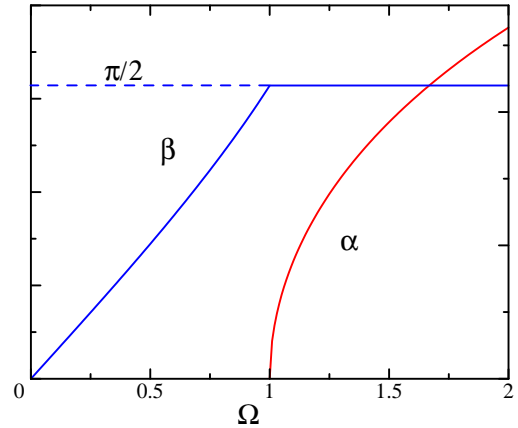
(1)  $\Omega \leq 1$

$\sqrt{1 - \Omega^2}$  は実数であるから  $\sinh \alpha \sin \beta = 0$ 、すなわち  $\alpha = 0$  または、 $\beta = n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) である。しかし、後者は  $\cos \beta = \pm 1$ 、 $\sqrt{1 - \Omega^2} \leq 1$  より、 $\alpha$  の解がなくなってしまう。従って  $\alpha = 0$  で、減衰のない透過域である。

(2)  $\Omega > 1$

$\sqrt{1 - \Omega^2}$  は純虚数で  $\cosh \alpha \cos \beta = 0$ 。  $\cosh \alpha$  は 0 にはならないので、 $\cos \beta = 0$ 、すなわち  $\beta = \pi/2$  である。  $\sinh \alpha = \sqrt{\Omega^2 - 1}$  より、 $\cosh \alpha = \Omega$  である。

右図に  $\alpha$  と  $\beta$  の概略の周波数依存性を示した。このように、 $\omega_0$  からフィルターとしての減衰特性が生じるため、 $\omega_0$  が遮断周波数になっている。



### 3.3 受動素子回路の過渡応答

伝達関数を  $\Xi(i\omega)$ 、入力を  $f(t)$  とし、 $F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$  と書くと、出力  $g(t)$  は

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(i\omega) F(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.57)$$

とすることができる。これを数値的に解くことが過渡応答の容易な解法である。多くの力学系は対応する電気回路を考えることができるため、その過渡応答について理解・実験しておくことは、容易な物理的シミュレーションとしても有効である。

#### 3.3.1 エネルギー貯留素子数による回路の分類

過渡応答を議論する際に、エネルギー溜めの数による分類が良く行われる。これまで見てきた線形回路素子では、電気エネルギーを貯留するキャパシタ、磁気エネルギーを貯留するインダクタ (まとめてリアクタンス素子) が存在したが、これらが 1 個ある回路を単エネルギー回路、2 個以上ある回路を複エネルギー回路とする。ただし、並列キャパシタのように、1 つの貯留素子にまとめてしまえるものは複数素子とはしない。

これは、伝達関数の極が単数か複数かの違いである。複数存在する場合、位相シフトは全体として  $\pi$  あるいはそれ以上回るため、共鳴・振動現象が生じる可能性がある。共鳴点ではエネルギー貯留回路間でエネルギーのやり取りが生じ、リアクタンス成分が消失するので、貯留素子 (回路) が複数なければならないことは容易に理解される。

単エネルギー貯留回路の伝達関数は一般に極の数は 1 以下であり、代表的には周波数  $s$  側に適当な係数を導入することで

$$\Xi(s) = \frac{1}{1 + s/s_0} \quad (3.58)$$

の形に書くことができる。最も簡単な例として図 3.17(a) の CR ローパスフィルターでは、 $\omega_0 \equiv 1/CR$  とすると、 $s = i\omega$  に対する伝達関数は、(3.58) の形となる。

複エネルギー貯留回路の代表は、図 3.17(b) の共鳴回路である。すでに式 (2.25) に示したように、この回路の伝達関数は

$$\Xi(s) = \frac{1}{b + s + as^{-1}} \quad (3.59)$$

という形に書くことができる。

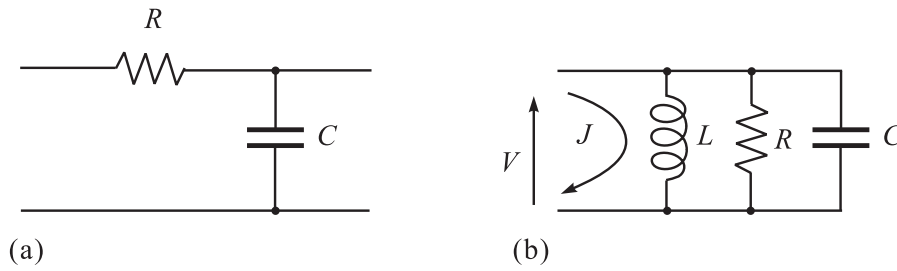


図 3.17 (a) 単エネルギー貯留 (キャパシタ  $C$ ) 回路. CR ローパスフィルター. (b) 複エネルギー貯留 (キャパシタ  $C$ , インダクタ  $L$ ) 回路. CRL 並列共鳴回路. この場合電流  $J$  に対する電圧応答  $V$  を見る.

### 3.3.2 階段関数に対する応答

例として,  $t = 0$  で電圧  $V_{in}$  が 0 から有限値に立ち上がる, 階段関数的な入力があった場合を考えよう. Heaviside 関数  $u(t) = 0 (t < 0), 1/2 (t = 0), 1 (t > 0)$  を考えると,  $u(t)$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}\{u\} = \mathcal{U}(i\omega)$  は, 良く知られているように [1]

$$\mathcal{U}(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (3.60)$$

である.

まず, 単エネルギー貯留回路で見てみよう. 図 3.17(a) の回路は過渡応答を見るうえでも最も簡単といえるものである.  $t = 0$  で  $V_0$  の階段関数電圧が入力したとすると,  $R$  を流れる電流は, 出力電圧を  $V$  として  $(V_0 - V)/R$  であり, これが  $C$  に流れ込んで  $Q/C = V$  となるから,  $V$  に関する微分方程式は

$$C \frac{dV}{dt} = \frac{V_0 - V}{R} \quad (3.61)$$

となり,  $t = 0$  で  $V = 0$  という条件から, 直ちに次の  $V$  の表式が得られる.

$$V = V_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \right]. \quad (3.62)$$

最も簡単な例ではあったが, 複雑な場合であっても結局は常微分方程式を解けば良い, ということはわかる. 同じことを (3.57) のように扱う方法でやってみよう. (3.58) で, 振動数  $\omega (s = i\omega)$  を  $\omega_0 = (CR)^{-1}$  で測りなおすことにすると,  $\Xi(i\omega) = (1 + i\omega)^{-1}$  である. これと, (3.60) より, (3.57) の  $g(t)$  は,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + i\omega} \left[ \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i - \omega)\omega} \frac{d\omega}{2\pi} + \frac{1}{2}$$

のようになる. 右辺第 1 項の積分は, 左上のような積分路を取って積分することで得られる. 積分路が囲む極は  $\omega = i$  であるから, 小円部分を  $\omega = \epsilon e^{i\theta}$ ,  $d\omega = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$  と置いて,

$$-2\pi i \frac{e^{-t}}{2\pi i} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta} t}}{\epsilon e^{i\theta} (\epsilon e^{i\theta} - i)} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{2\pi} \right] = -e^{-t} - \frac{1}{2}.$$

結局, これらの和は

$$g(t) = -e^{-t} \quad (3.63)$$

となる. 今振動数を  $\omega_0 = (CR)^{-1}$  で測っており, これはすなわち  $t$  を  $CR$  で測っていることになる. また, 入力階段関数  $u(t)$  の高さを 1 としているので,  $t \rightarrow t/CR$  として全体の過渡応答の振幅を  $V_0$  倍し, 境界条件である  $t = 0$  での応答を 0 とすると, (3.62) と同じ答が得られていることがわかる.

以上の例は大変簡単のため, ご利益が不明かもしれないが, 特に問題が複雑になった場合に適当に問題設定して微分方程式を解く, ということをせずに, 半自動的に一方向的な計算によって解が得られる点が便利である.

## 参考文献

[1] 例えば 近藤次郎 「フーリエ変換とその応用」(培風館, 1975).

## 付録 D: フィルター特性と物理フィルター

フィルター特性は、伝達関数の数学的表現から分類されている。代表的なものを見ておこう。全体に共通する特徴として、減衰域での周波数依存性があり、ローパスの場合であれば遮断周波数  $\omega_0$  よりも十分高い周波数でゲインが  $\omega^{-n}$  の形で落ちていく場合、 $n$  次のフィルターと呼ぶ。

### D.3 バタワース・フィルター

$n$  次バタワース (Butterworth) ローパス フィルターのゲインは遮断周波数を  $\omega_0$  として、

$$G^2(i\omega/\omega_0) = |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \quad (\text{D.1})$$

と表される。この特性は、透過域においてゲインの波打ち (リップル) がなく、 $\omega_0$  近傍から  $\omega^{-n}$  でゲインが落ちる、素直な形状をしているのが特徴である。

ただし、透過域での位相と周波数の関係  $\partial\theta/\partial\omega$  (群遅延特性 group delay characteristics) にはリップルが存在し、透過信号に歪を生じる。速い変化に対するリングングやオーバーシュートとしても現れる。

### D.4 ベッセル・フィルター

$n$  次ベッセル (Bessel) ローパス フィルターの伝達関数は

$$H(s) = \frac{\theta_n(0)}{\theta_n(s/\omega_0)} \quad (\text{D.2})$$

である。特徴は、群遅延特性にリップルがないことで、ひずみが少なく、方形波入力に対してリングングを生じない。カットオフ特性が緩やかな点が問題となる場合がある。

### D.5 チェビシェフ・フィルター

$n$  次のローパスチェビシェフ (Chebyshev) フィルターのゲイン (伝達関数の絶対値) は、次のように表される。

$$G_n(i\Omega) = |H_n(i\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}}. \quad (\text{D.3})$$

$\Omega$  は遮断周波数で規格化した周波数、 $\epsilon$  は透過域のゲインの波打ち (リップル) を決めるリップル係数、 $T_n$  は  $n$  次のチェビシェフ多項式である。

透過域でゲインに  $\epsilon$  で決まる振幅のリップルがある。このため信号の歪は大きく、ステップ信号にはリングングやオーバーシュートが現れる。一方、遮断周波数からの減衰特性を急峻にできる特長があり、狭い帯域で使用する場合、ノッチフィルターとして使用する場合など、低い次数で高い性能が得られる可能性がある。

### D.6 物理的共鳴器を使ったフィルター素子)

共鳴現象を起こす物理系を電子回路に取り込み、有効的に共鳴回路として用いてしまうこともしばしば行われる。このような場合、例えば前節のような分類に当てはめるのは困難であることが多い。

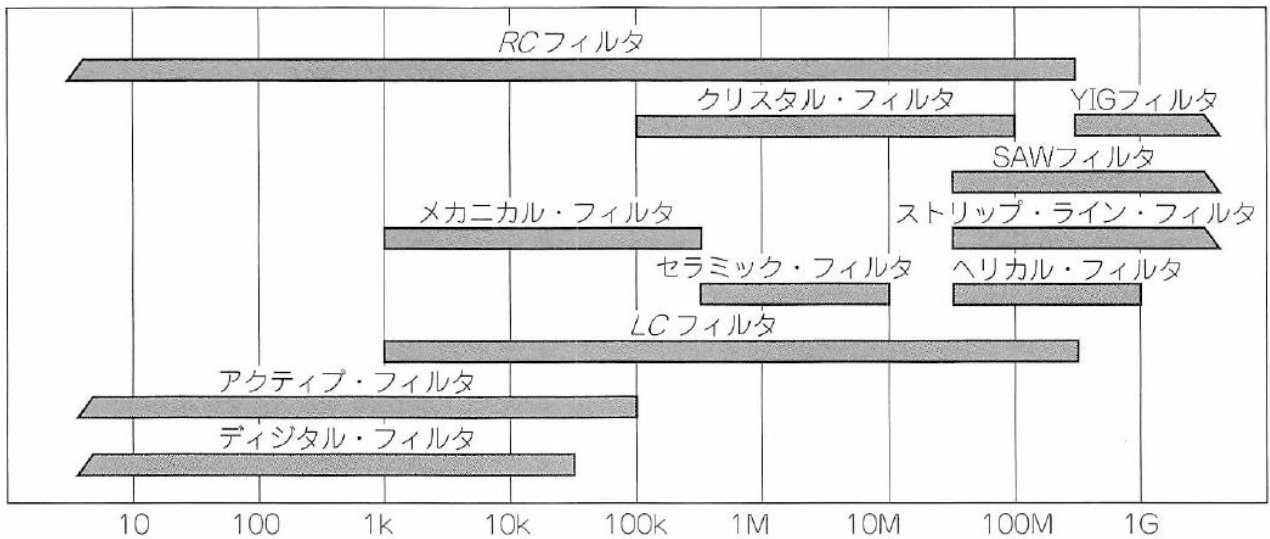


図 D.1 電気回路によるフィルター，様々な物理的共鳴を使用した電気フィルターのカバー周波数範囲. 横軸単位は Hz.

### D.6.1 クリスタルフィルター

非常に良く知られた例は，水晶振動子 (quartz crystal unit) である. 水晶 (quartz) は， $\text{SiO}_2$  の結晶 (通常は六角柱面を持つ三方晶系) であり，圧電効果 (結晶に機械的圧力が加わることで，電圧を生じる) を持っており，結晶をある面方位の薄片にすると，結晶全体の機械的共鳴により共鳴器として働く. 更に誘電体の圧電効果であることから，金属板で挟むことで，そのまま 2 端子電子回路素子として動作させることができる.

水晶振動子の用途で最も多いのは，発振回路であるが，ここでは，図 D.2 のクリスタルフィルターを紹介しよう. (a) のような外観をしていることが多いが，中身は，(b) のように水晶振動子とキャパシタで  $\pi$  型のフィルターを構成している. (c) のように特性は極めて Q 値が高く，狭帯域のフィルターとして働く一方，(b) で直列にする振動子の中心周波数をわずかにずらして並べることで透過特性のトップがフラットな，「富士山型」の特性 (スカート特性と呼ぶ) を得ることができる.

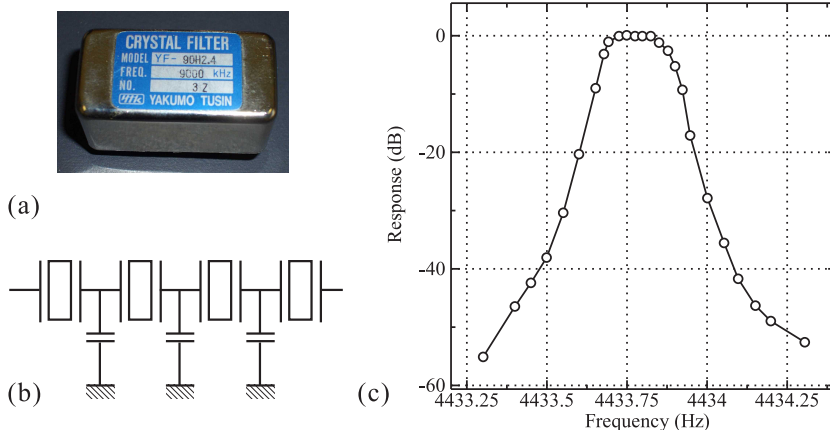


図 D.2 (a) クリスタルフィルターの外観例. (b) クリスタルフィルターの回路図. コンデンサが長方形を挟んでいる形状の記号は，水晶振動子を表す. (c) クリスタルフィルターの周波数特性例. 4 素子 443kHz.

### D.6.2 メカニカルフィルター

最近ではほとんど使用されなくなったが，金属で作製した素子の機械的な振動の共鳴を利用したフィルターである. アマチュア無線機器メーカーのコリンズが製作販売しているものなどが有名である. 高周波フィルターは困難で，中間周波フィルターなどに使用された. 講師の中学生時代など自作派 HAM の垂涎の的であった.

### D.6.3 セラミックフィルター

クリスタルフィルターと電磁気的な原理は同じである。水晶ではなく焼成した多結晶セラミック（酸化物）の圧電効果と弾性振動モード共鳴をフィルターとして用いる。メカニカルフィルターを置換して、中間周波フィルターとして多用されている。

### D.6.4 SAW フィルター

ピエゾ効果を持つ基板の上に楕形電極を置いて表面弾性波 (Surface Acoustic Wave, SAW) と楕形電極との共鳴によってフィルター効果を実現したもの。携帯電話などの比較的高い周波数の中間周波フィルターなどに使用されている。

### D.6.5 YIG フィルター

イットリウム鉄ガーネット (Yttrium Iron Garnet, YIG) 合金単結晶の球の振動を用いたフィルター。強磁性体のため外部磁場によって共鳴周波数を広範囲に変化させることができる。これを用いた発振器は安定な周波数可変発振器として、計測器に広く使用されている。