電子回路論 第 10 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2014 年 12 月 10 日

前回のサマリー

スミスチャートとインピダンス整合　スミスチャートでインピダンス整合過程を可視化
S 行列　波動散乱問題の一般的処方箋
S パラメタと高周波デバイス　S パラメタ (S 行列) を用いた高周波増幅回路のインピダンス整合，安定化係数

第 4 章 過渡応答と分布定数回路　(続き)

4.5　シュレディンガー方程式 (定質量分散方程式) と LC 伝送路

同軸ケーブルなどの伝送線路のモデルとして分布定数回路を導入したが，物理的伝送線路を離れて適当なインピダンスとアドミタンスを考え極限を取ることで「仮想伝送線路」を考えることができる．一方，講義の最初で，電子回路は簡単な古典力学系に対応させて考えることができると述べた．これは，集中定数回路と質点系のような離散系についての話であったが，波動を伝える連続系に関してもこのような「仮想伝送線路」を考えることで対応させることができる．その御利益は，伝送線路で得られた概念やシミュレーション技法によってこれらの力学系の解析が見通し良く行えることである．

ここでは，シュレディンガー方程式に対応するような LC 伝送路を考えてみる．シュレディンガー方程式は量子力学的な波動関数を記述する方程式であるが，もちろん，「波動関数」の解釈次第で古典的な波動方程式と見ることもできる．例えば線形化した超伝導の GL 方程式はシュレディンガー方程式と同形式であるが，波動関数は多くの電子 (クーパー対) によって構成されている古典的な波動である．

4.2.1 節で分布定数回路を導入したが，その際，純粋リアクタンス回路として考えた，直列 L と並列 C の回路では波動がフォトンと同じで分散がなく，シュレディンガー方程式に対応できない．一方，レジスタンス (実数) 成分を入れると，波動が減衰しシュレディンガー方程式系で要求されるユニタリティを破る．そこで，図 4.17 のように，C に並列に L を挿入し，共鳴回路列の形で分散を与えることができないかどうか考えてみる [**?**]．この時，L の「実体」の代表であるコイルは，C とは逆で直列接続で加算的になるものなので，物理的に考えるとやや抵抗があるが，ここでは抽象的に「合成アドミタンスは横幅 dx に比例」とかんがえる．このため，線要素のインダクタンス L は「単位長さの逆数あたりのインダクタンス」というちょっと普通でない物理次元を持つ．一方 C は単位長さあたりであるから，共鳴周波数 $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ は従って，普通に 1/(時間) の次元となる．

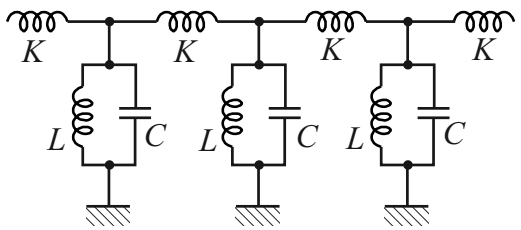


図 4.17　LC 伝送路で分散を与えるため，分布キャパシタに並列に分布インダクタンスを加えてみた．

この場合，8-1 ページの図の設定で，直列インピダンス，並列アドミタンスはそれぞれ，

$$Z = i\omega K, \quad Y = \frac{1-(\omega/\omega_0)^2}{i\omega L} \quad \left(\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

であるから，(4.10) の $\kappa \equiv ik$ は次のように書くことができる．

$$ik = \kappa = \sqrt{YZ} = i\sqrt{\frac{K}{L}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right]}\,.$$

$K/L \equiv \eta^2$ と置く．インダクタンス K は普通に単位長さあたりであるから，η の物理次元は 1/(長さ) である点に注意．$\omega \gg \omega_0$ では，$k \sim \eta(\omega/\omega_0)$ となって分散が生じず，質量はゼロである．これは，挿入した L の効果が $1/i\omega L$ で小さくなるため当然であるが，この時の波の伝播速度は，$c^* = \omega/k = \omega_0/\eta$ である．

挿入 L の効果が出る $\omega \sim \omega_0$ の範囲で考える．$\omega = \omega_0 + \delta\omega$ として $\delta\omega/\omega_0$ について 1 次まで展開すると，

$$k^2 \approx 2\eta^2\frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad \therefore \epsilon \equiv \hbar\delta\omega = \frac{\hbar k^2}{2(\eta^2/\omega_0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad \left(m^* \equiv \frac{\hbar\eta^2}{\omega_0}\right) \tag{4.61}$$

となって，確かに質量 m^* を持つ粒子と同じ分散関係が局所的に現れていることがわかる．なお，線形な分散を持つ波動に摂動で質量を生じさせた場合の一般的な性質として，

$$E_0 = \hbar\omega_0 = \frac{\hbar\eta^2}{\omega_0}\cdot\left(\frac{\omega_0}{\eta}\right)^2 = m^* c^{*2} \tag{4.62}$$

が現れている．

4.6 非線形 LC 伝送路と戸田格子

同軸ケーブルその他の伝送路の分布定数キャパシタは一般に線形性が良く，線形応答系として扱ってきたが，敢えて非線形素子を使用することで，現実の力学系では実現が難しい非線形系を作り出すことが可能になる場合がある．そのような例を紹介しよう．

4.6.1 戸田格子

非線形波動の様々な興味深い性質は，有名な Scott-Russell のソリトン (孤立波) 観測を始め，かなり以前より色々と知られていた．本格的に数学的解析が行われるようになったのは，Fermi-Ulam-Pasta が MANIAX という電子計算機を使った計算機実験で，非線形のばねで質点をつないだ力学系で不思議な再帰現象を見出してからである．

非線形力学系の中でも興味深い現象を見せ，様々な解析的結果が得られる「完全可積分系」であることで良く知られているのが**戸田格子** (Toda lattice) であり，戸田ポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{a}{b}e^{-br} + ar \quad (ab > 0) \tag{4.63}$$

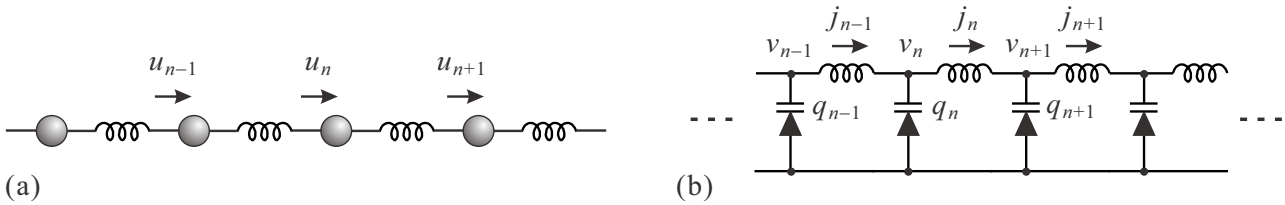


図 4.18 (a) ばねでつながれたおなじみ 1 次元質点系．しかし，(4.63) のポテンシャルを採用すると，戸田格子と呼ばれる非線形格子となる．(b) LC ラダー回路．C 部分にバリキャップを使用している．

を持つばねでつながれた質点系である．運動方程式は

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = -a\exp[-b(u_{n+1}-u_n)] + a\exp[-b(u_n-u_{n-1})] \tag{4.64}$$

であり，相対変化 $r_n \equiv u_{n+1} - u_n$ に対しては，

$$m\frac{d^2r_n}{dt^2} = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}) \tag{4.65}$$

となる．相対変化 r とばねの力 f の関係

$$f = -\phi'(r) = a(e^{-br} - 1) \tag{4.66}$$

を用いると，さらに

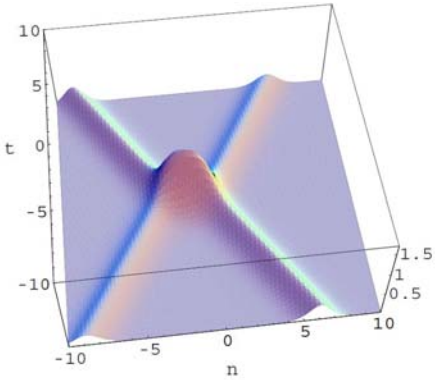
$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left(1+\frac{f_n}{a}\right) = \frac{b}{m}(f_{n+1}+f_{n-1}-2f_n) \tag{4.67}$$

と書き換えられる．

戸田格子では様々な解析解が知られているが，有名なものとして**ソリトン** (soliton) 解がある．

$$u_n = \omega^2\mathrm{sech}^2(\kappa n + \sigma\omega t + \delta), \quad \sigma = \pm 1, \quad \omega = \sinh\kappa, \quad \kappa,\ \delta : \text{constants} \tag{4.68}$$

の形に書かれる孤立波である．N 個の相互作用するソリトンの解も存在し，$N = 2$ の場合は，



$$u_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - 1, \tag{4.69a}$$

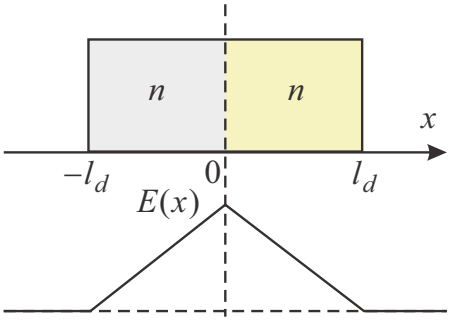
$$\tau_n = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + A_{12}e^{2(\eta_1+\eta_2)}, \tag{4.69b}$$

$$\eta_i = \kappa_i n + \sigma_i\omega_i t + \delta_i, \quad \sigma_i = \pm 1,\ \omega_i = \sinh\kappa_i, \tag{4.69c}$$

$$A_{12} = \frac{ab\sinh^2(\kappa_1-\kappa_2) - m(\sigma_1\omega_1-\sigma_2\omega_2)^2}{m(\sigma_1\omega_1+\sigma_2\omega_2)^2 - ab\sinh^2(\kappa_1+\kappa_2)} \tag{4.69d}$$

で表される．左図が良く非線形系に現れる孤立波の性質を表すものとして提示される 2 ソリトン解の時間発展の様子を示すもので，反対方向に進むソリトンが衝突し，2 つの波の振幅よりも高い波高を示したのち，再び 2 つに分かれて伝播し，かつ衝突点でどちらかと言えば交差というより向きを反転して進んでいる様子がわかる．

4.6.2 非線形キャパシタ



非線形なキャパシタの代表は，バリキャップ (varicap) と呼ばれる素子で，その中身は第 6 回で紹介した半導体の pn 接合である[*1]．

pn 接合が非線形な電気容量を与えることは，左図のような簡単なモデルから容易に理解できる．簡単のため，p 側のアクセプター濃度，n 側のドナー濃度は等しく n であるとする．外部電圧ゼロでも，p 側の正孔はエントロピー増大圧力により n 側に出てこのため接合面からの距離 l_d の部分で電荷を中和する正孔がおらずイオン化アクセプターによって負に帯電した状態になっているとする．n 側でもこれに対称な効果が生じ l_d の領域で正に帯電している．この状態を接合面を挟んだ

[*1] 論文 [2] では，「電圧に容量が依存するキャパシタ」とあるだけで，本当は何なのか不明である．$C \propto V^{-0.49}$ とあることからバリキャップと判断した．

キャパシタと考えると，接合全体にかかる電圧 (電流電圧特性を見た時とは逆方向に正極を取る) は誘電率を ϵ として，

$$V_\mathrm{b} = \frac{en}{\epsilon}\int_{-l_d}^{0} 2(x+l_d)dx + \frac{en}{\epsilon}\int_{0}^{l_d} 2(l_d-x)dx = \frac{2enl_d^2}{\epsilon} \tag{4.70}$$

である．V_b と同じ方向 (すなわち逆方向) 電圧 V を印可して，電荷 Q が接合にたまったとすると，接合の面積を S として，

$$V + V_\mathrm{b} = \frac{2en}{\epsilon}\left(l_d + \frac{Q}{nS}\right)^2 \quad \therefore C = \frac{dQ}{dV} = \sqrt{\frac{\epsilon}{2en}}\frac{nS}{\sqrt{V+V_\mathrm{b}}} \tag{4.71}$$

となる．$V \gg V_\mathrm{b}$ であれば，$C \propto V^{-0.5}$ となって，論文 [2] にある非線形キャパシタの記述と合致する．

4.6.3 L-Varicap 伝送路

そこで，このバリキャップとインダクタによる伝送線路 (図 4.18(b)) を考える．非線形であることから，改めて回路方程式を立てると，

$$L\frac{dJ_n}{dt} = v_n - v_{n-1}, \tag{4.72a}$$

$$\frac{dq_n}{dt} = J_{n-1} - J_n, \tag{4.72b}$$

$$q_n = \int_0^{v_n} C(V)dV, \quad C(V) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0)+V-V_0} \tag{4.72c}$$

となる．バリキャップには V_0 のバイアス電圧を加えているとした．(4.71) の分母で $V + V_\mathrm{b} = V_0 + \delta V$ として，δV について展開し，改めて δV を V と書き換えれば (4.72c) の形にできることがわかる．図 4.18(b) で $v_n = V_0 + V_n$ とすると，

$$q_n = Q(V_0)\log\left[1 + \frac{V_n}{F(V_0)}\right] + \mathrm{const.} \tag{4.73}$$

であるから，

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left[1 + \frac{V_n}{F(V_0)}\right] = \frac{1}{LQ(V_0)}(V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n) \tag{4.74}$$

となって，(4.64) と同形式になることがわかる．

第 5 章 信号，雑音，波形解析

これまで電 (磁) 気的信号を取り扱う文字通りの「回路」を考えてきた．この講義では伝統的に，この回路で取扱い，処理をする「信号論」を扱うことになっている．「信号論」はこれも極めて広大な分野であり，内容の選択が難しいところである．

まず，ゆらぎ，雑音の議論を避けて通ることはできない．現実の雑音には様々な種類がある．統計物理で扱うのは熱雑音やショット雑音など，物理系が本来的に持っている雑音である．揺動散逸定理は，ゆらぎ (雑音) とエネルギー散逸の関係を与える．電子回路でも無論重要であるが，恐らく「統計力学 I，II，特論」などで詳しく学んでいるはずである．また，ポップコーン雑音，バルクハウゼン雑音など，回路素子内の内的要因による雑音だが回避可能なもの，も重要な雑音である．

電子回路論では，外部から飛来する電磁雑音の排除も極めて重要である．また逆に，特に高周波信号を扱う際に回路から飛び出してしまう電磁波による妨害 (electromagnetice interference EMI, あるいは，electromagnetic compatibility EMC) も大きな課題である．

信号波形論も，積分変換による波形解析，サンプリング論，また変調を用いた信号伝送工学など間口が広いが物理実験に役立ちそうなものを選んで講じる．

5.1 ゆらぎ

これまで，電位 (電圧)，電流を主に「信号」と考え，これらを表す入力関数 $f(t)$，出力関数 $g(t)$ というように抽象化して議論してきた．しかし，これらの現実の物理量には必ずゆらぎが存在し，電子回路論の言葉では「雑音」である．雑音には様々な要因が存在し，要因によって分類することができる．この中で，外部から飛来する電磁ノイズは，電子回路的には極めて重要な問題であり，これを避けるための一般的な手法については後で簡単に紹介する．

物理量 x のゆらぎ δx，および平均 2 乗偏差 $\overline{(\delta x)^2}$ を

$$\delta x = x - \bar{x}, \quad \overline{(\delta x)^2} = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \tag{5.1}$$

で定義する．ゆらぎの平均はゼロ $\overline{\delta x} = 0$ である．x の分布関数 $g(x)$ に対してそのフーリエ変換

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ixt} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{5.2}$$

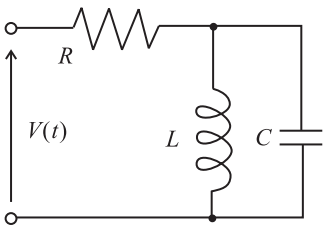
を考えると，$u(t)$ をテーラー展開することで，

$$\overline{x^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^n} \left[\frac{d^n}{dt^n} u(t) \right]_{t=0} \tag{5.3}$$

が得られる．従って，高次のモーメントが得られれば $u(t)$ を通して $g(x)$ が得られる (現実にはこれは多くの場合困難である)．$u(t)$ を分布の特性関数という．

今，δx を「ゆらぎ」，$\overline{\cdots}$ を「平均」としたが，何に対してゆらぐのか区別する場合もある．系 (アンサンブル) を取り直すたびに何らかの確率過程が入って系の示す物理量に揺らぎが生ずる場合，各確率過程は独立事象である．ここでは，$\overline{\cdots}$ としてこのようなゆらぎに関する平均を意味することにする．これに対して，x が何らかの確率的摂動によって時間 t に対してゆらぐ場合，$x(t)$ の値は直前の値の影響を受けることになる．このような揺らぎに対する平均を $\langle \cdots \rangle$ のように書くことにする．摂動が全くランダムで $x(t)$ は直前の値にのみ影響される場合を**単純マルコフ過程** (simple Markov process) と呼ぶ．$x(t)$ がそれより前の m 個の値，$x_1, \cdots, x_m$ から影響を受ける場合，これを m 重マルコフ過程と呼ぶ．

5.1.1 揺動散逸定理



久保亮五らによって確立・定式化された線形応答理論中の重要な要素，**揺動散逸定理** (fluctuation-dissipation theorem) の考え方を平たく言うと次のようになる．散逸のある系で散逸するエネルギーと外界（熱浴）から入り込むエネルギーがバランスして定常状態にあるとする．エネルギーのやり取りには揺らぎ（搖動）があり，これが熱力学諸量のゆらぎを生む．従って，散逸とゆらぎとの間に一定の関係が生じる．

何度も出てきた左図の散逸のある LC 共鳴回路を例に，揺動散逸定理の紹介だけをしよう．インピダンス，アドミタンスはそれぞれ，

$$Z(i\omega) = \frac{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad Y(i\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}$$

と表される ($\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$).

この時，揺動散逸定理 (第 2 種) は，電圧 $V(t)$ の熱雑音パワースペクトル $G_v(\omega)$ として，

$$G_v(\omega) = 4k_{\mathrm{B}}T\mathrm{Re}[Z(i\omega)] \tag{5.4}$$

を与える．雑音がエネルギー散逸を生じる抵抗 (あるいは，コンダクタンス) 成分により生じるとしている．

上の回路に適用すると，

$$G_v(\omega) = 4k_{\mathrm{B}}TR \tag{5.5}$$

となり，電圧雑音は ω に依存しない (白色)．(5.5) のような熱雑音を**ジョンソン-ナイキスト雑音** (Johnson-Nyquist noise) と呼ぶ.

5.1.2 ウィナー-ヒンチンの定理

ウィナー-ヒンチン (Wiener-Khintchine) の定理は，「揺動散逸定理」と呼ばれる一連の理論の一部である．結果だけ述べる．時間 t に対する揺らぎを持つ量 $x(t)$ に対して**自己相関関数** (self-correlation function) を

$$C(\tau) = \overline{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle} \tag{5.6}$$

で定義する．前に述べたとおり，$\langle\cdots\rangle$ は時間平均を意味し，$\overline{\cdots}$ は更にアンサンブル平均を取ることを意味している．

この時，振動数 ω に対する**スペクトル密度** (spectrum density, power spectrum) を $G(\omega)$ とすると，ウィナー-ヒンチンの定理は，

$$G(\omega) = 4\int_0^\infty C(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \tag{5.7a}$$

$$C(\tau) = \int_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau\frac{d\omega}{2\pi} \tag{5.7b}$$

と書かれる．すなわち，時間揺らぎの自己相関関数とスペクトル密度はフーリエ変換で結ばれる関係にある．

参考文献

[1] 和達三樹「非線形波動」(岩波書店, 2000).

[2] R. Hirota and K. Suzuki, Proc. IEEE **61**, 1483 (1973).