電子回路論 第 13 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2015 年 1 月 5 日

前回のサマリー

振幅変調 (AM)　搬送波 (キャリア)，側帯波 (サイドバンド)
角度変調　周波数変調 (FM)，位相変調 (PM)
変調法と帯域　AM は原信号の 2 倍 + キャリア，FM はデルタ関数的で広帯域
変調と雑音　搬送波の分 AM がやや不利．現実には位相フィルターの効果が大きい．

第 5 章 信号，雑音，波形解析　(続き)

5.3　離散化信号

物理実験においては，時間依存する信号波形をそのままデータとして収集することもしばしば行われる．この場合，離散化された時刻においてデータが収集 (標本化，sampling) され，時系列離散数列となる．アナログデータをディジタイズする具体的方法，またデジタイズされた信号の処理方法については次章でディジタル回路を学んだ後に考えよう．この節では，離散化による影響を考え，信号離散化を用いて行うパルス変調の紹介をする．またディジタル信号処理の入り口として，離散フーリエ変換，ラプラス変換 (z 変換) を導入しておく．

5.3.1　標本化定理

時間 t に対する連続量 $x(t)$ を考え，これを時間間隔 τ で標本化するとする．この離散化された「標本」を $\tilde{x}(t)$ と書くと，間隔 τ のインパルス (デルタ関数) 列を $\delta_\tau(t)$ と書いて

$$\tilde{x}(t) = x(t)\delta_\tau(t) \tag{5.59}$$

と表される．$\delta_\tau(t)$ は，周期 τ の周期関数であることから，区間 $[-\pi/\tau, \pi/\tau]$ のフーリエ級数展開ができる．

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-in\frac{2\pi}{\tau}t\right). \tag{5.60}$$

したがって，そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{\delta_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in(2\pi/\tau)t}\right]e^{i\omega t}dt &= \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right)t\right]dt \\ &= \frac{2\pi}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right) = \frac{2\pi}{\tau}\delta_{2\pi/\tau}(\omega)\end{aligned} \tag{5.61}$$

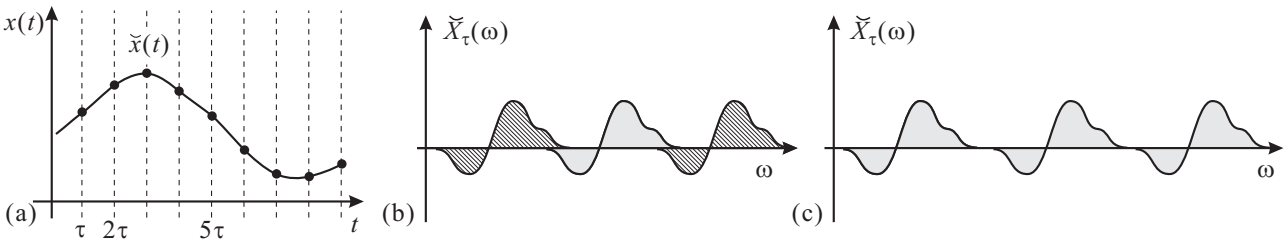


図 5.20　(a) 信号 $x(t)$ に対する標本 $\tilde{x}(t)$ を模式的に示した．(5.59) の定義は δ 関数のためこのようには描けないが，δ 関数の係数を点で示した．(b) $\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}(\omega)$．信号の持つスペクトルに比べ，τ が長く，標本化定理が成立しない場合．(c) 標本化定理が成立する場合．

となって，ω 空間でもデルタ関数列になる．$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega)$，$\mathscr{F}\{\tilde{x}_\tau(t)\} = \tilde{X}_\tau(\omega)$ とすると，合成 (畳み込み) を $*$ で表して

$$\tilde{X}_\tau(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \frac{2\pi}{\tau}\delta_{2\pi/\tau}(\omega) = \frac{1}{\tau}X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right)$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega')\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau} - \omega'\right)\right\}d\omega' = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right) \quad (5.62)$$

が得られる．

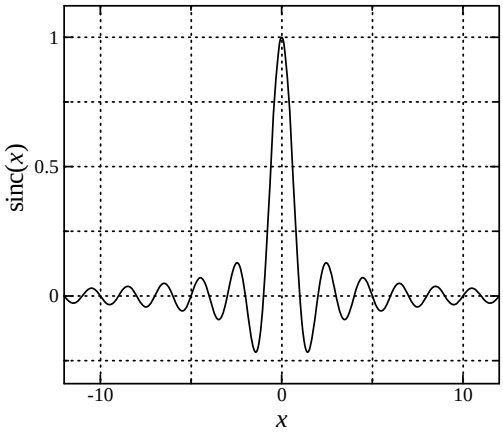


図 5.21　sinc 関数

もし，$X(\omega)$ が $\omega_\tau = \pi/\tau$ より大きな ω の成分を持たなければ，(5.62) の各 n に属する項は ω 軸上で重ならないから，幅 $2\pi/\tau$ で $\tilde{X}_\tau(\omega)$ を切り出すことで完全な $X(\omega)$ が得られ，これから $x(t)$ が復元できる (図**)．すなわち，標本化により元の信号 $x(t)$ の性質を失わないための十分条件は，$x(t)$ が標本化周波数 $1/\tau$ の 1/2 $1/2\tau$ 以上の周波数成分を含まないこと，である．言い換えると，$x(t)$ が含む最高周波数の 2 倍の周波数で標本化すれば，$x(t)$ の性質は失われない．これを**標本化定理** (sampling theorem) と言い，$1/2\tau$ を**ナイキスト周波数** (Nyquist frequency, Nyquist rate) という．

$x(t)$ の復元過程は形式的には $\tilde{X}(\omega)$ に関数

$$P_{\pi/\tau}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \dfrac{\pi}{\tau}, \\ 0 & |\omega| > \dfrac{\pi}{\tau} \end{cases} \quad (5.63)$$

をかけ，更に τ をかけて逆フーリエ変換する．

(5.63) の (逆) フーリエ変換は sinc 関数と呼ばれ，

$$\mathrm{sinc}x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (5.64)$$

で定義される関数[*1](図 5.21) を使って $(1/\tau)\mathrm{sinc}(t/\tau)$ となるので，

$$x(t) = \tau\frac{1}{\tau}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) * \tilde{x}_\tau(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t - n\tau)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{s}{\tau}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-s)\delta(t - n\tau - s)ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right)x(n\tau) \quad (5.65)$$

[*1] これは，正規化 sinc 関数と呼ばれ，信号処理などで良く使用される定義である．数学では非正規化 sinc 関数 $\sin x/x$ を sinc 関数と呼ぶことが多い．

が得られる．すなわち，得られた離散測定値が標本化定理を満たしている場合，標本値に sinc 関数を乗じて時間軸全域で加算することで $x(t)$ を復元することができる．

上の標本化定理は，時間軸上で離散的な測定をする場合のものであったが，周波数軸上で離散測定をする場合も考えられる．t 軸上の場合と全く同じで，ω 軸上の $X(\omega)$ 標本間隔を η とすると，$X(\omega)$ の復元のためにはフーリエ変換 $x(t)$ が時間 $2\pi/\eta$ 内に局在していることが十分条件となる．

標本化定理は，フーリエ変換 (波形の正弦波分解) の極めて基本的な性質を表すものということができ，物理学の中にも多くの類似概念を見出すことができる．例えば，結晶格子中のフォノン (音波)，電子など．

5.3.2 パルス変調

パルス変調は, 搬送波としてパルス列を用いる方式で, やはり振幅変調 (PAM), 位置変調 (PPM), 幅変調 (PWM) 等がある．

パルス振幅変調

PAM 方式の場合，各パルスにどのように信号を乗せているかは別として，これらを何らかの方法により取得した場合，パルス列は時間に対する離散信号と見ることができるから，受信側では前節の標本化信号が得られることになる．従って，復調のためには，信号帯域に対してパルス間隔が標本化定理の条件を満たしていることが必要である．前節では「十分」しか示していないが，間隔が広く，フーリエ成分に重なりが生じた場合は，単純にカットして復調した場合，重なりによってひずみ (aliasing noise，折り返し雑音) が生じることが明らかである．

各パルスが間隔に比して十分狭く，デルタ関数 (インパルス) 列とみなせる場合は，PAM は前節の標本化定理そのものである．インパルス標本化，理想標本化などと呼ぶ．間隔 τ のインパルス列キャリアは $c(t) = \delta_\tau(t)$ であり，そのフーリエ級数展開は (5.60) である．また，式 (5.59) が入力信号と変調信号との関係を示している．更に，(5.62) のフーリエ変換が周波数スペクトルを表している．すでに前節で示したことであるが，一応入力信号，変調信号，変調信号スペクトルの例を示すと図 5.22 のようになる．

このようなデルタ関数的キャリアの PAM 信号 (理想 PAM と呼ぶことがある) の復調は，従って前節で述べた図 5.22(c) のスペクトルから最低周波数バンドだけ抜き出すフィルターにかければ良い[*2]ことがわかる．このフィルターを伝達関数 $\Xi(i\omega)$ で表すと，これは (5.63) そのもの，すなわち $\Xi(i\omega) = P_{\pi/\tau}(\omega)$ である．

PAM 方式では，現実の信号の物理的制限から，パルス幅 τ_p が周期 τ に比べて無視できず，方形波として扱わなければならないことも多い．この場合，ヘヴィサイド関数 $H(x)$ あるいは，(5.63) で定義される窓関数を使ってキャリア $c(t)$ を

$$c(t) = \frac{1}{\tau_\mathrm{p}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H\left(t - n\tau + \frac{\tau_\mathrm{p}}{2}\right) - H\left(t - n\tau - \frac{\tau_\mathrm{p}}{2}\right) \right] = \frac{1}{\tau_\mathrm{p}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{\tau_\mathrm{p}/2}(t - n\tau) \tag{5.66}$$

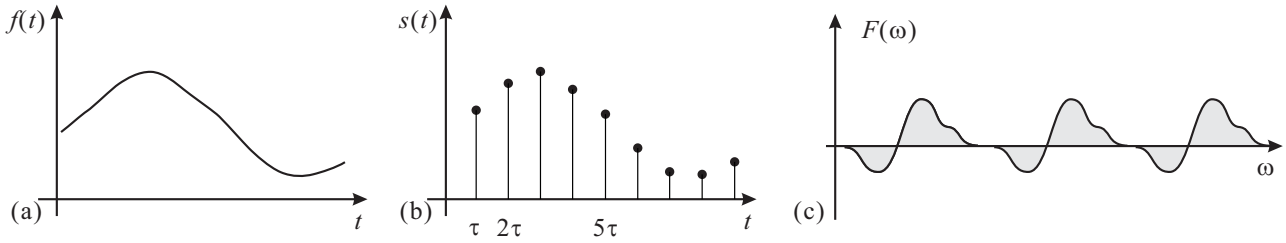


図 5.22　PAM 変調．(a) 原信号．(b) PAM 変調信号．(c) PAM のフーリエ変換スペクトル例．模式図

[*2] 図 5.22(c) はパワースペクトルであり位相情報は失われているが，当然フィルターは各周波数に対して位相を保持するものでなければならない．

と書くと，窓関数のフーリエ変換である sinc 関数 (5.64) を用いて，$c(t)$ のフーリエ級数展開

$$c(t) = \frac{1}{\tau_{\mathrm{p}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(n\frac{\tau_{\mathrm{p}}}{\tau}\right) \exp\left(2n\pi i\frac{t}{\tau}\right) \tag{5.67}$$

が得られる．入力 $f(t)$ に対する変調信号 $s(t)$ は $s(t) = f(t)c(t)$ であるから，その周波数スペクトル (フーリエ変換)$S(i\omega)$ は $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$ と書いて

$$S(i\omega) = \frac{1}{\tau_{\mathrm{p}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(n\frac{\tau_{\mathrm{p}}}{\tau}\right) F[i(\omega - 2n\pi/\tau)] \tag{5.68}$$

である．

5.3.3 離散フーリエ変換

時刻 $[0, \zeta)$ の間だけゼロでない値を取る信号 $f(t)$ があり，そのフーリエ変換 $F(\omega)$ が $(-\pi/\tau, \pi/\tau)$ の区間だけでゼロでない値を取るとする．後の便宜のため，ζ，τ を

$$N = \frac{\zeta}{\tau} \tag{5.69}$$

が正整数になるようにとっておく (f，F の定義を満たすような，ζ，τ が適当に大きく取れることは明らかである)．f から周期 ζ の関数を次のように作り出し，$\tilde{f}$，そのフーリエ変換を $\tilde{F}$ と置く．

$$\tilde{f}(t) = f(t) * \delta_\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\zeta), \quad \tilde{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n\frac{2\pi}{\tau}\right). \tag{5.70}$$

周期関数 $\tilde{f}(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる．

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(n\frac{2\pi}{\zeta}\right) \exp\left(2n\pi i\frac{t}{\zeta}\right). \tag{5.71}$$

指数 n を $n = l + mN$ (l，m は整数) と書いて n の和を $\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty}$ とする．t を離散的な値 $t = j\tau$ (j は整数) に取ると，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(j\tau) &= \frac{1}{\zeta} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left[(l + mN)\frac{2\pi}{\zeta}\right] \exp\left[(l + mN)2\pi i\frac{j\tau}{\zeta}\right] \\ &= \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi l}{\zeta} + m\frac{2\pi}{\tau}\right) \exp\left(2\pi i\frac{lj}{N}\right) = \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{F}\left(l\frac{2\pi}{\zeta}\right) \exp\left(2\pi i\frac{lj}{N}\right)\end{aligned} \tag{5.72}$$

と書ける．回転因子を

$$W_N \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) \tag{5.73}$$

とし，$\eta \equiv 2\pi/\zeta$ と書くと，

$$\tilde{f}(j\tau) = \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{F}(l\eta) W_N^{-lj} \tag{5.74}$$

と形式的に書くことができる．なお，W_N の次の性質は明らかであろう．

$$\forall n, m \in \boldsymbol{Z} \quad W_N^{n+mN} = W_N^n, \tag{5.75a}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad m = 0, \\ 0 & \text{for} \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{5.75b}$$

(5.74) の両辺に τW_N^{mj} をかけ，j について $0,\cdots,N-1$ で和を取ると，特に (5.75b) の性質を使って次が得られる．

$$\tau\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{f}(j\tau)W_N^{mj}=\sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{F}(l\eta)W_N^{(m-l)j}\right]=\tilde{F}(m\eta). \tag{5.76}$$

そこで，$n,k\in\boldsymbol{Z}$ に対して

$$f_n\equiv\tilde{f}(n\tau),\quad F_k\equiv\frac{1}{\tau}\tilde{F}(k\eta) \tag{5.77}$$

と定義すると，(5.74)，(5.76) は次の形に書けることになる．

$$F_k=\sum_{n=0}^{N-1}f_nW_N^{kn}, \tag{5.78a}$$

$$f_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F_kW_N^{-kn}. \tag{5.78b}$$

(5.78a) が**離散フーリエ変換** (discrete Fourier transform, DFT)，(5.78b) がその逆変換を表している．以上からわかるように，DFT は等間隔離散化 (標本化) された周期関数に対して適用されるフーリエ変換と見ることができ，フーリエ変換に対して成立する一般的な性質の多くを保持している．

(5.78) はまた，$\boldsymbol{F}={}^t\{F_i\}$，$\boldsymbol{W}=\{W_N^{ij}\}$，$\boldsymbol{f}={}^t\{f_i\}$ と置くことで，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{f},\quad \boldsymbol{f}=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{F} \tag{5.79}$$

と書くことができる．これより，${}^t\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{W}=N\boldsymbol{I}_N$ (N 次元単位行列) であるから，$\boldsymbol{W}/\sqrt{N}$ がユニタリ行列になっていることがわかる．このように，離散フーリエ変換において積分変換が有限次元線形代数に変換できたのは，無論，フーリエ変換の線形性が最も重要な因子であり，それが離散化されることで可能になったことであるが，(5.69) のように逆空間スケールの比を整数 N にとって無限回の繰り返しを有限次数の空間に集積したことが重要なトリックであったことには注意しておこう．

現実に実験で得られるデータは離散データでありかつ有限区間での測定であるから等間隔でないものは適当な補間で等間隔とし，また，仮想的に測定区間で周期的な関数であるとすることで離散フーリエ変換が可能になる．現実に離散フーリエ変換をデータから実行する極めて速いアルゴリズムが**高速フーリエ変換** (fast Fourer transform, FFT) であり，物理の実験家で FFT のお世話にならない人はまずいないという程ポピュラーな解析法である．いくつかのアルゴリズムがある内の１つを付録 I に示している．

5.3.4 z 変換

離散信号に対する離散フーリエ変換に対し，同じく離散信号に対するラプラス変換を **z 変換** (z-transform) と呼んでいる．$t\geq 0$ での離散時間 (標本化) 信号

$$\tilde{f}_\tau(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\tau)\delta(t-n\tau) \tag{5.80}$$

の (ラプラス変換を考えるため n の和を 0 以上 ($t\geq 0$) とした) ラプラス変換は

$$\mathscr{L}\{\tilde{f}_\tau(t)\}=\mathscr{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}f(n\tau)\delta(t-n\tau)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\tau)\mathscr{L}\{\delta(t-n\tau)\}=\sum_{n=0}^{\infty}f(n\tau)\exp(-sn\tau) \tag{5.81}$$

で与えられる．

ここで，

$$z=\exp(s\tau) \tag{5.82}$$

f_n	$F(z)$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
n^k	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^k \dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\sin(n\omega\tau)$	$\dfrac{\sin(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\cos(\omega\tau)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$e^{-n\alpha\tau}\cos(n\omega\tau)$	$\dfrac{1-e^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}}{1-2e^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}+e^{-2\alpha\tau}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > e^{-\alpha\tau}$

表 5.1　片側 z 変換の例と収束領域.

と置き，離散フーリエ変換の時と同様に $f_n = f(n\tau)$，$F(z) = \mathscr{L}\{\tilde{f}_\tau(t)\}$ と置くと，(5.81) は

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{5.83}$$

と書くことができる．この級数を**片側 z 変換** (one sided z-transform) と言い，$F(z) = \mathscr{Z}[f_n]$ などと表す．(5.83) の級数が収束する領域はある正の実数 r_0 を使って一般に

$$|z| > r_0 \tag{5.84}$$

の形に表すことができる．表 5.1 にいくつかの例を示した．

z 変換の逆変換は，Bromwich 複素積分法を用いると，

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c F(z)z^{n-1}dz \tag{5.85}$$

と書かれる．

(5.83) に対して，$n < 0$ でも f_n が有限値を持っている場合，**両側 z 変換** (bilateral z-transform) の必要が出てく

性質名	信号	z 変換
線形性	$af_n + bg_n$	$aF(z) + bG(z)$
相似則	$f_{\alpha n}$	$F(z^{1/\alpha})$
時間移動	f_{n+k}	$z^k\left[F(z) - \sum_{l=0}^{k-1} f(l)z^l\right]$
時間移動 II	f_{n-k}	$z^{-k}F(z)$
スケール変換	$e^{\mp\alpha n}f_n$	$F(e^{\pm\alpha}z)$
スケール変換 II	$a^n x_n$	$F(a^{-1}z)$
インデックスとの積	nf_n	$-z\dfrac{d}{dz}F(z)$
微分	$n^k f_n$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^n F(z)$
積分	$\dfrac{f_n}{n+a}$	$z^a\int_z^\infty \xi^{-a+1}F(\xi)d\xi$
畳み込み	$f_n * g_n$	$F(z)\cdot G(z)$
積	$f_n \cdot g_n$	$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c F(\xi)G\left(\dfrac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}d\xi$

表 5.2　片側 z 変換の主要な性質．$\mathscr{Z}[f_n] = F(z)$，$\mathscr{Z}[g_n] = G(z)$ としている．

る．デジタルフィルターなどでは両側 z 変換を考えることもそれ程稀ではない[*3]．

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}. \tag{5.86}$$

これは，ローラン展開と呼ばれるものであり，収束領域は一般に $r_1, r_2 \in \boldsymbol{R}$，$0 < r_1 < r_2$ を使って

$$r_1 < |z| < r_2 \tag{5.87}$$

のように表される．

z 変換は次に示す伝達関数を通してディジタル信号処理システムの記述に，また，ラプラス変換と類似の性質を持つことから，ラプラス変換が演算子法を通して常微分方程式の解法に使用されたのと同様，差分方程式を解くのに使用されたりする．主要な性質について表 5.2 にまとめている．

5.3.5 離散化信号と伝達関数

離散化信号入力に対する線形システムの応答を考える．離散化信号が (5.59) のように δ 関数列に信号を乗算した形で表されることから，系の各 δ 関数に対する応答を h_n と書くと，入力離散化信号 f_n に対する応答は，畳み込みを使って

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k f_{n-k} \tag{5.88}$$

と表される．この時，g_n の z 変換は

$$G(z) = \mathscr{Z}[y_n] = \mathscr{Z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} h_k f_{n-k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k f_{n-k}\right) z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \sum_{n=0} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} F(z)$$

と計算される．ここで，インパルス応答列に対する z 変換を

$$H(z) = \mathscr{Z}[h_n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$

と書くと，

$$G(z) = H(z)F(z) \tag{5.89}$$

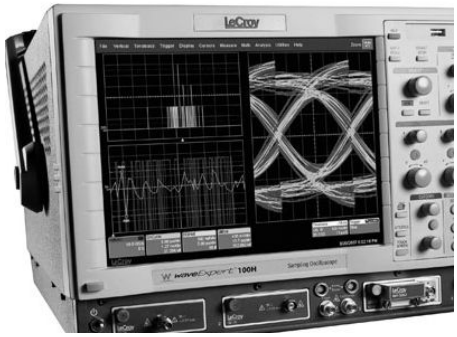
と，(2.9) 式と形式的に同じになる．そこで，この $H(z)$ をやはり，離散信号に対する伝達関数と呼ぶ．

[*3] 通常のラプラス変換でも無論，$t < 0$ の領域も考える両側ラプラス変換は存在する．

第 6 章 ディジタル信号とディジタル回路

6.1 ディジタル信号序論

前章で時間に対して離散化された信号を扱ったが，信号レベルも離散化したものが**ディジタル信号** (digitized signal) である．信号として意味を持つ最小の単位である 2 つのレベルを使用することが最も多く，この信号単位を**ビット** (bit) と称する．ディジタル回路とは，このディジタル信号を扱うことを前提とした電子回路である．ディジタル信号と言っても物理的には電磁気を用いた信号であることに変わりはなく，それを扱う回路も素子レベルまでブレークダウンすればこれまでに見てきた回路素子と全く違いはない．しかし，前章終わりで見たように，離散化によって信号の現実的な扱いには大きな差が生じる．



更にディジタル-アナログ回路の差を明確にしたのが集積回路による回路のカプセル化であり，次節から紹介する線形/非線形の区別も概念上あまり意味をなさない程非線形な論理ゲート IC と，フィードバックを使って線形領域で運用することを主な使用環境とするリニア IC，その中間に位置する目的限定型の IC などのアナログ IC とでは入力に対する応答が全く異なる．ディジタル-アナログでは全く異なる物理系を形成するようになり，この 2 つの「世界」の間をつなぐアナログ-ディジタルインターフェイス回路のためにも専用 IC が作られるようになった．ところが，これまでも度々述べてきたようにディジタル回路が極めて早い応答を求められるようになり，同期のためのクロック信号周波数が飛躍的に高くなった結果，回路配線を伝送線路，信号を導体に沿う電磁波の一種として扱わなければならなくなった．Gbit/s (すなわち，1ns に 1 ビット以上の情報を伝送する) 伝送信号になると，右の写真のオシロスコープ画面波形のように，波形自身は離散化されていないアナログ波形として捉えなければならなくなり，エンジニアは両者渾然とした「電子回路」を相手とする必要が生じている．

これまで，信号としては時間 t に依存する 1 つの物理量 $f(t)$ として扱ってきたが，1 伝送路で 2 値に離散化された信号を送るとすると，同時に n ビットの論理値を伝送するためには n 本の**並列** (パラレル) 伝送路が必要になる．そこで，一般にディジタル信号は多次元化して $q_i(t)$ のようにして扱う．$\{q_i\}$ で 1 つの論理値を表すので，これを入力 $f(t)$ と思えば信号論としては 1 次元で扱うことになる．

ディジタル回路の機能は，ディジタル信号の伝送，演算，蓄積の 3 つにまとめられる．情報の形態は大きく違うものの，物理的な回路としては，アナログ，ディジタルでの区別はなく，特に伝送路は何の違いもない．一方，回路の動作モードは，線形領域で使用することが多かったアナログ回路に比べ，ディジタル回路ではほとんどが非線形領域での動作となる．

物理実験においては，パルスを扱う際の機器間の動作，タイミング調整のために自前のディジタル回路を構成する必要が生じる可能性がある．場合によっては PC による処理が追いつかず，大掛かりなディジタル回路を自作せざるを得ないこともあるが，このような場合は最近では FPGA を用いるのが普通である．が，これを行うためにも個別論理ゲートを用いたディジタル回路の知識は不可欠である．

6.2 論理ゲート

1 ビット信号の 2 つのレベルに対しては，

1. 0，1 に対応させて 2 進数で表す，
2. 偽，真 (false F, true T) と対応させて論理値として扱う，

という処理が (もちろんこれらは同値) 行われる．この論理値に対して「演算」を行う回路は，ブール代数の論理演算と１対１の対応があり，その動作は入力に対して出力 (演算結果) を表す真理値表を用いて規定される．これを論理ゲート回路と称している．

論理ゲート回路は，その出力が入力データだけで決定される**組み合わせ回路** (combinational logic) と，そのゲートの直前の「状態」にも依存する**順序回路** (sequential logic) とに別れる．今，論理ゲート回路の入力が n ビット，出力が l ビットあり，下の表のように，時刻 $t_1, \cdots, t_m$ に対して入力が $\{f_{ij}\}$ で表されるように変化したとする．入力が一定の間は変化直後の信号遅延時間を除いて出力は一定で変化しない (因果律)．時刻 t_j の入力変化に対して．出力がどのように変化するかを表形式で示したものが**真理値表** (truth table) である．また，入出力の変化を時間に対する矩形波形で表したものが**タイミングチャート** (timing chart) である．

		input					output			
t		t_1	t_2	$\cdots$	t_m		t_1	t_2	$\cdots$	t_m
Ch.	1	0	1	$\cdots$	f_{1m}	1	1	1	$\cdots$	q_{1m}
	2	1	0	$\cdots$	f_{2m}	2	0	1	$\cdots$	q_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	0	1	$\cdots$	f_{nm}	l	0	1	$\cdots$	f_{lm}

以下，ごく基本的な論理ゲートに限って簡単に紹介しておく．

6.2.1 組み合わせ回路：１入力ゲート

input	buffer	not
0	0	1
1	1	0

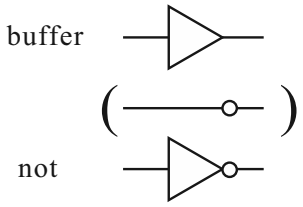


図 6.1　バッファ，及びノットゲートの真理値表と回路図．

組み合わせ回路のうち，入力が１つのみのゲートは，図 6.1 に示す 2 種類である．この内，中段に示した丸の記号は独立したゲートではなく，否定 (not) を表す記号であり，バッファ記号との組み合わせで not ゲートを表す．バッファは論理的には何もしていないが，現実には例えばファンアウト (１つの出力を使って幾つものゲートを同時にドライブしたい場合) の数を取りたい場合や LED 点灯やモータードライブなど電力を必要とする回路に接続する際などに挿入することで良く使用されるゲートである．

6.2.2 組み合わせ回路：２入力ゲート

２入力で出力が１のゲートは，２つの論理値から１つの論理値を導くことに相当し，あらゆる論理演算の基本である．また，他の組み合わせ回路は，すべてこれらの更なる組み合わせから構成できる．特に重要なものは，図 6.2 に示したような，２入力に対して対称な応答をするゲートである．また，この図に示したように，ゲートの出力のところに１入力ゲートで示した白い丸を配することで「否定」を表し，否定出力ゲートとすることができる．真理値表では例として nand ゲートを示した．この nand ゲートはユニバーサルゲートであり，このゲート１つから他のすべての組み合わせゲートを構成することができる．以下，真理値表を用いて主要なフリップフロップの動作を紹介する．順序回路であるから本来はタイミングチャートも描く意味があるが，真理値表でも十分動作は規定できる．

input1	input 2	and	or	xor	nand
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

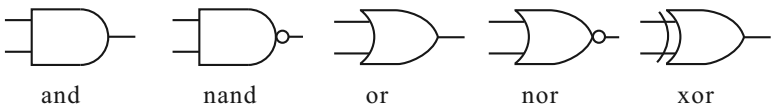


図 6.2　代表的２入力ゲートの真理値表と回路図

6.2.3 順序回路：フリップフロップ

順序回路の中で最も基本的なものがフリップフロップ (flip-flop, FF) であり，他の順序回路も FF と組み合わせ回路ゲートを用いて構成することができる．

RS フリップフロップ

リセット/セット (reset set, RS) フリップフロップは，単にラッチとも呼ばれ，データを保持 (ラッチ) する機能がある．図 6.3 のように R (reset) 入力と S (set) 入力に対し出力 Q と反出力 $\bar{Q}$ が存在する．nand および not ゲートを使って図のように表現することもでき，実際汎用ゲートをこのように配線することで RS フリップフロップとして動作させることもできる．RS 入力によって Q ($\bar{Q}$) を決めると，入力が 0 に落ちてもこの値を維持し，次の RS 入力によって出力が変更されるまでこれを維持する．RS が同時に 1 を取ると，出力は不定になってしまう．

S	R	Q	$\bar{Q}$	動作
0	0	Q	$\bar{Q}$	不変
0	1	0	1	reset
1	0	1	0	set
1	1	不定		

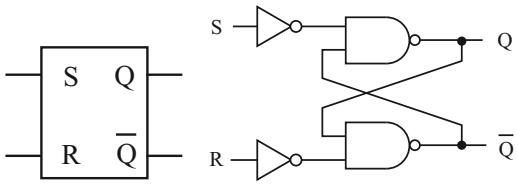


図 6.3 RS フリップフロップの真理値表，回路記号，及び，これを 2 入力論理ゲートで表した回路図.

JK フリップフロップ

JK フリップフロップは，クロック入力端子 (CLK) を持ち，クロック端子が 0→1 (あるいは 1→ 0) と変化する際に出力が変化する．その変化の仕方は，図 6.4 の真理値表のように規定されている．

J	K	Q	次の CLK 入力時の Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	–	0
1	0	–	1
1	1	0	1
1	1	1	0

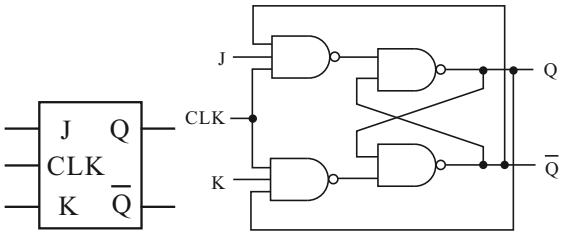
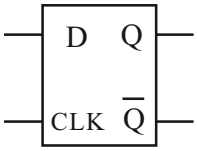


図 6.4 JK フリップフロップの真理値表，回路記号，及び，これを 2 入力論理ゲートで表した回路図.

D フリップフロップ，T フリップフロップ

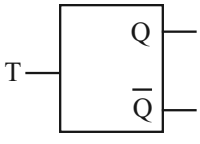
D (データ) フリップフロップは，CLK 信号の立ち上がりで D 入力端子の値が出力され，以降，CLK が一旦下がって再び立ち上がるまでの間この値を保持する．T（トグル) フリップフロップは，T 入力端子の値が上下するたびに出力が反転する．これらの回路記号と真理値表を図 6.5 に示した．

(a)



D	CLK	Q
0	↑	0
1	↑	1
–	↓	Q (hold)

(b)



T	Q	Q
↓	0	0
↓	1	1
↑	0	1
↑	1	0

図 6.5 (a) D フリップフロップの回路記号と真理値表．(b) T フリップフロップの回路記号と真理値表.

JK FF による他の FF の表現

以上見てわかるように，紹介した FF は適当に配線，使用することで相互に入れ替えることが可能である．例えば，JK-FF を使って他の 3 つを表すと，図 6.6 のようになる．

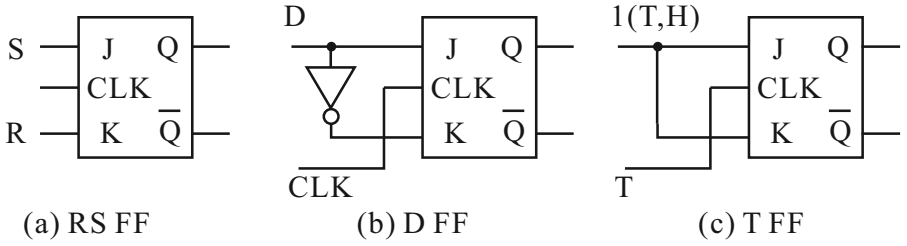


図 6.6　JK-FF を用いて，(a) RS-FF (クロック付)，(b) D-FF，(c) T-FF を構成する．(c) で 1 (T, H) とあるのは，1 の固定信号 (実際には電源の H(高電圧側)) を常時入力することを示す．

6.2.4　順序回路：カウンタ

カウンタは，入力される信号の変化の回数を出力するものである．

非同期カウンタ

図 6.7 に示したのは最も簡単なカウンタ回路であり，単に T-FF をシリーズで接続したものである．クロック入力信号が変化して 0→1 という変化が生じる度に 4 ビットの出力 2 進数が減少するダウンカウンタである．$\bar{Q}$ 側を使えば，アップカウンタにすることができる．このカウンタは，入力の変化が生じる度にその変化がゲートを 1 つづつ経て波のように広がってゆく．このことから，このような出力変化が同期していない非同期カウンタを「リップルカウンタ」とも呼ぶ．

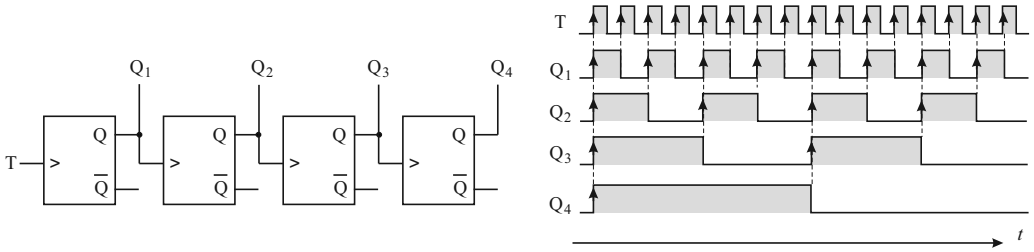


図 6.7　T-FF 4 つを用いた最も簡単な 4 ビット非同期 (リップル)2 進ダウンカウンタ．右はタイミングチャート．

同期カウンタ

リップルカウンタはリップルが広がっていく間は誤ったデータを出力していることになる．これに対して，出力を (もちろんゲート遅延時間のばらつき誤差範囲で) 同時に変化させたい場合，図 6.8 のような同期カウンタを用いる必要がある．このためには，カウント出力をデータとして予め用意し，D-FF を使ってクロック入力に同期して出力しラッチするのが簡単な方法である．

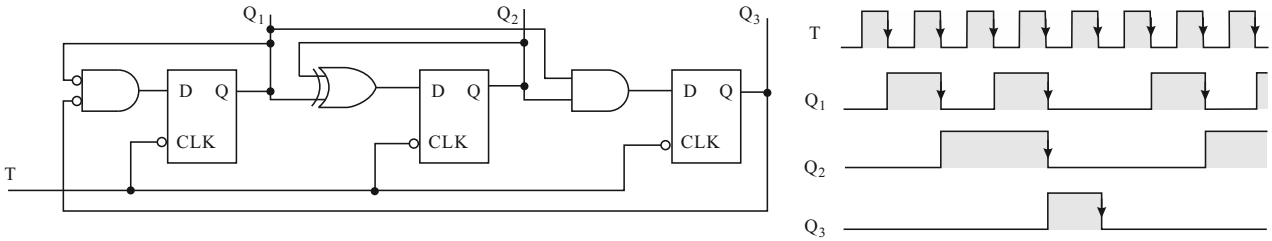
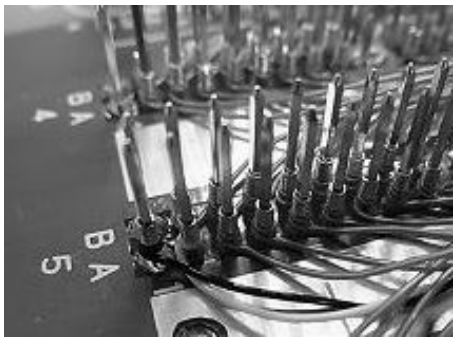


図 6.8　3 ビット同期アップカウンタ回路例とタイミングチャート．なお，CLK 信号入力に丸 (否定) が付いているのは，信号の立下りで D-FF が D 入力を Q 出力へラッチすることを示す．また，2 つの丸に and ゲートがついたゲートは，入力を a，b とすると，$\bar{a} \cap \bar{b}$ を表し，ド・モルガンの定理より $\overline{a \cup b}$ であるから，nor ゲートと同じである．

6.3 論理ゲートの実装



以上簡単な例で見たように，IC へのカプセル化によって回路図や配線は劇的に簡単になり論理 IC のピン間を回路図通りにつなげば良い，と考えられていた時期があった．このため，自作のディジタル回路では，左の写真のように長いピンを持つ IC ソケットに硬めの配線を巻き付けて結線するワイヤラッピング配線法が盛んに使用されていたこともあり，現在でもシミュレータで十分に拾いきれない問題を調べるため，テスト回路などでは使われている．しかし，すでに述べたように，高いクロック周波数での動作，また前回述べた EMC の観点などから，このような配線法はあまり行われなくなり，自作やテストも FPGA を用いることが多くなった．

以上は余談であり，本節の目的はこのように「カプセル化」されているディジタル IC 論理ゲートのアナログ的中身について簡単に見ておくことである．これは，カプセル-ブロック化した IC の様々な物理的規定がどのような原因で生じているかを理解するためである．図 6.9 に論理ゲートの回路構成法の代表である，TTL (transistor-transistor logic) と CMOS (complimentary metal-oxide-semicondcutor) による nand ゲートの構成例 (等価回路) を示した．いずれも 4 つのトランジスタまたは FET で構成されているが，その仕様のされ方はかなり異なっている．

(a) の TTL 構成では，入力にダブルエミッタトランジスタを用いている．これは挿入図にも示したように 2 つのトランジスタが並列になっているものとして動作を理解することでができる．従って，A_{in} または B_{in} が 0 (L, GND) であれば，トランジスタ Q_1 が ON になって電流が流れ，Q_2 を ON にする．Q_3 と Q_4 はプッシュプル回路を構成しており，Q_2 が ON の時は Q_3 が ON で Q_4 が OFF，Q_2 が OFF の時は Q_3 が OFF で Q_4 が ON になるように回路定数が決められている．以上から，入力が両方 H になった時のみ Q_1 が OFF になって出力が GND 側に振れ，nand 動作をすることがわかる．この回路から，TTL では入力レベルとして初段のトランジスタを ON/OFF することが求められること，出力は V_{CC} から GND まで振れるわけではなく，出力段のプッシュプルトランジスタによる電圧ドロップを考慮しなければならず，また，出力の負荷抵抗によって出力電圧が変化することも理解される．

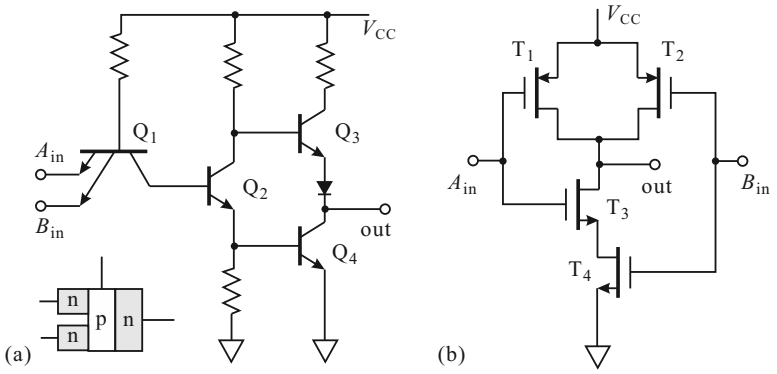


図 6.9 (a) TTL 構成による nand ゲート内部回路の等価回路例．挿入図はダブルエミッタトランジスタの層構成模式図．(b) CMOS 構成による nand ゲート内部回路の等価回路例．内向き矢印 MOS-FET は p チャネル，外向き矢印は n チャネル．(エンハンストモード)

これに対して，(b) の CMOS 構成は非常に簡潔である．complimentary という名前の通り，必ず p チャネル，n チャネル両方の MOS-FET を使用する．これは，全く同じ入力電圧に対して ON と OFF の逆の動作をするスイッチが使えることを意味し，このような入力に対して自在に V_{CC} 側と GND 側とをつなぎ替えることが可能である．(b) では，A_{in}，B_{in} の H 信号に対して OFF になる p-MOSFET を V_{CC} に並列につなぎ，ON になる n-MOSFET を GND に直列接続している．このため，両方が H になった時のみ出力が GND に接続され，それ以外は V_{CC} に接続されて nand 動作をすることがわかる．MOS 回路は次段の入力抵抗が非常に高いのが普通であり，これに対して FET の ON 抵抗は無視でき，ON/OFF 電圧の V_{CC}/GND からのずれは，FET の自己バイアス分で TTL に比べて大きな出力の振幅が取れることがわかる．もちろん，この素朴な回路では，電源側に接続した並列回路と接地側の直

列回路とが遷移領域で同時に ON となって筒抜けになる危険性があるなど，この周辺に様々な安全回路を設ける必要がある．

以上から，論理ゲートを動作させるための特徴的な電圧が，V_{CC} を 5V に設定した場合，図 6.10 のようになることが理解される．ただし，特に TTL の場合，適当な負荷や電源の周囲配線をすることが前提となっている．また，V_{CC} を 5V から大きく変更することは，TTL の場合，通常の半導体物質パラメタから困難であることも理解されるであろう．

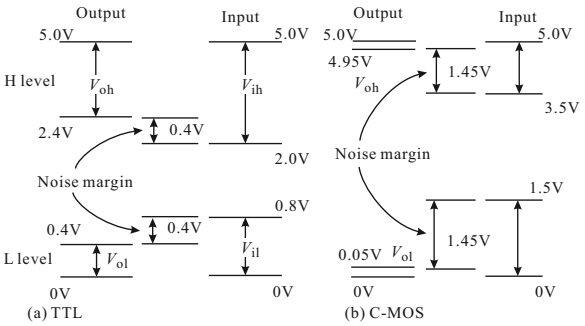


図 6.10　標準論理ゲート動作の電圧ダイアグラム．(a) TTL，(b) C-MOS

歴史的にみると，IC 化され論理ゲートして盛んに使用され始めたのは TTL が先であり，圧倒的な利用範囲を持っていたため論理信号の H，L が 5V，0V というのが標準となった．初期の頃の CMOS IC は，動作のためにむしろ高い電源電圧を必要とし，TTL 回路と接続のためにはレベル変換回路を用意したりした．また，やはり初期は CMOS の動作速度は TTL を改良した LS 型，ALS 型に及ばず，PC の周辺回路等，ほとんど TTL で組まれていた．しかし，クロック周波数が高くなり LSI の集積度が高くなるにつれて，素子間の距離をできるだけ短くすることが非常に重要になり，ゲートあたりの素子数が少なく，電流がゲートの帯電/放電時のもの程度で消費電力が極めて小さい CMOS が次第に有利となった．素子特性も単ゲート化によってむしろ改善され 5V より低い電圧でも十分動作するようになり速度も向上した．3.3V や 2.5V を H レベルとする回路も増え，最近では京などのスーパーコンピュータの CPU も CMOS となり，現在のところ論理ゲートの世界は CMOS に完全支配されてしまったように見える．

ただし，CMOS も含めて論理演算そのものが現在様々な物理的壁に当たっており，並列計算などのソフトウェア手法で全体としての行き詰まりを回避しているのが現状であるから，ハードウェア側にも何か大きなフレークスルーがある可能性はある．

付録 I：高速フーリエ変換

まず，「時間間引き」アルゴリズムと呼ばれるものを紹介しよう．離散フーリエ変換 (5.78) の N を偶数に取る．また，添え字 n が表す数を偶数，奇数に分けて次のように書き直す．

$$F_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nk}. \tag{I.1}$$

２番目の変形では，W_N の性質より，$W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ となることを使った．$\{F_k\}$ を得るためには各 $k = 0, \cdots, N-1$ について (I.1) を計算するが，このうち，$k = N/2, \cdots, N-1$ については，$k \to k + N/2$ と置換え，$W_{N/2}^{nN/2} = 1$，$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ を使うと，

$$F_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W_N^{k+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{n(k+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{nk} \tag{I.2}$$

と書ける．ここで，

$$X_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk}, \quad Y_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nk} \quad (k = 0, \cdots, N/2-1) \tag{I.3}$$

と置くと，これらはいずれも $N/2$ 点の離散フーリエ変換 (DFT) と見ることができる．元の $\{F_k\}$ はこれらを用いて

$$\left.\begin{aligned} F_k &= X_k + W_N^k Y_k, \\ F_{k+N/2} &= X_k - W_N^k Y_k, \end{aligned}\right\} \quad k = 0, \cdots, N/2-1 \tag{I.4}$$

と表される．

以下，N が 2 のべき乗として $N = 2^q$ (q は整数) という数であったとすると，この手順を繰り返せば，最終的には 1 点の DFT を N 個求め，$(N/2)\log_2 N$ 回の積を実行することに帰着する．1 点の DFT は 1 の乗算で計算不要であり，計算量は $(N/2)\log_2 N$ 回の乗算で，元の DFT の N^2 回の乗算に比べると，大幅に計算量を減らしたことになる．逆フーリエ変換も，同様に「周波数間引き」を用いることで行うことができる．