電子回路論 第 3 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2014 年 10 月 21 日

第 2 章 線形回路序論

前回のサマリー

回路表現と伝達関数　インピダンス，アドミタンス
電源　理想電源，制御電源
回路網　キルヒホッフの法則，重ね合わせの定理，鳳-テブナンの定理
共鳴回路　LCR 共鳴回路，Q-円，Q-値

2.4　共鳴現象の一般的性質と一般共鳴回路

共鳴回路は共鳴現象という抽象概念の電子回路による具現化であるが，一方，共鳴回路の解析から得られる様々な情報の多くは共鳴現象に一般的なもので，変化に富む共鳴現象に共通する性質を抽出して我々に教えてくれる．ここにも，電子回路による概念のモデリングと逆抽出の典型を見ることができる．

2.4.1　共鳴現象

まず，共鳴とは系の固有振動数と入力の振動数が一致した時に生じる特有の応答現象である．ある系の自由度 q が固有振動数 ω_0 を持つということは，q について調和振動子近似

$$\frac{dq}{dt} = -\omega_0^2 q \tag{2.29}$$

が成立する，ということである．例えば，2.3.3 項の並列共鳴回路を，系の固有振動を見るため電源から切り離して孤立した状態でキャパシタに蓄積された電荷を変数に微分方程式を考える．電圧共通条件 (キルヒホッフ第 2 則) から

$$L\frac{dJ_{\mathrm{L}}}{dt} = -L\frac{d^2 q_{\mathrm{L}}}{dt^2} = \frac{q}{C} = RJ_{\mathrm{R}} = R\frac{dq_{\mathrm{R}}}{dt}$$

である．孤立していることから電荷保存 (キルヒホッフ第 1 則) により $dq_{\mathrm{L}} + dq_{\mathrm{R}} + dq = 0$．したがって

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

$q = \exp(\lambda t)$ として

$$\lambda = \frac{1}{2\tau}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4(\omega_0\tau)^2}\right] \approx -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0 \quad (\omega_0\tau \gg 1)$$

より，$\omega_0\tau$ が十分大きい場合は，固有振動数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ を持っていることがわかる．

2.4.2　共鳴と位相シフト

前項で見たように，共鳴は外部入力の振動数が系に内在する固有振動と一致してコヒーレントに励起が生じるため，特異的な応答が生じる現象である．線形応答系として見ると，共鳴点ではコヒーレントな励起であるために入力

と出力の位相がそろっていなければならないから，伝達関数の虚数成分，すなわち**リアクタンスはゼロ**となる．入力の振動数 ω が ω_0 と一致することともちろん同値である．

そこで，このような「共鳴現象」一般について，逆に共鳴回路の性質解析から考えてみる．図 2.6(a) のインピダンス，(b) のアドミタンスについて，ω が 0 から ∞ まで変化する際に，その偏角，すなわち入力と出力の位相のずれがどのようになるかを見ると，インピダンスでは，$\pi/2 \to -\pi/2$，アドミタンスでは $-\pi/2 \to \pi/2$ でちょうど π だけ変化していることがわかる．リアクタンス成分は，ω の ± 1 次から始まることを考えると，$\omega \to 0,\ +\infty$ で，0 または $\pm\infty$ に発散する．ω_0 で 0 となることを考えると，全体として π の変化，共鳴点で極限点を基準として $\pi/2$ の変化があることは極めて一般的な現象であることが結論される．

(ここで物理系の共鳴で位相シフトが π 変化する例を見る．ppt.)

2.4.3 様々な共鳴回路 (フィルター素子)

共鳴現象を起こす物理系を電子回路に取り込み，有効的に共鳴回路として用いてしまうこともしばしば行われる．非常に良く知られた例は，**水晶振動子** (quartz crystal unit) である．水晶 (quartz) は，SiO_2 の結晶 (通常は 6 角柱面を持つ三方晶系) であり，圧電効果 (結晶に機械的圧力が加わることで，電圧を生じる) を持っており，結晶をある面方位の薄片にすると，結晶全体の機械的共鳴により共鳴器として働く．更に誘電体の圧電効果であることから，金属板で挟むことで，そのまま 2 端子電子回路素子として動作させることができる．

水晶振動子の用途で最も多いのは，発振回路であるが，ここでは，図 2.8 のクリスタルフィルターを紹介しよう．(a) のような外観をしていることが多いが，中身は，(b) のように水晶振動子とキャパシタで π 型のフィルターを構成している．(c) のように特性は極めて Q 値が高く，狭帯域のフィルターとして働く一方，(b) で直列にする振動子の中心周波数をわずかにずらして並べることで透過特性のトップがフラットな，「富士山型」の特性 (スカート特性と呼ぶ) を得ることができる．

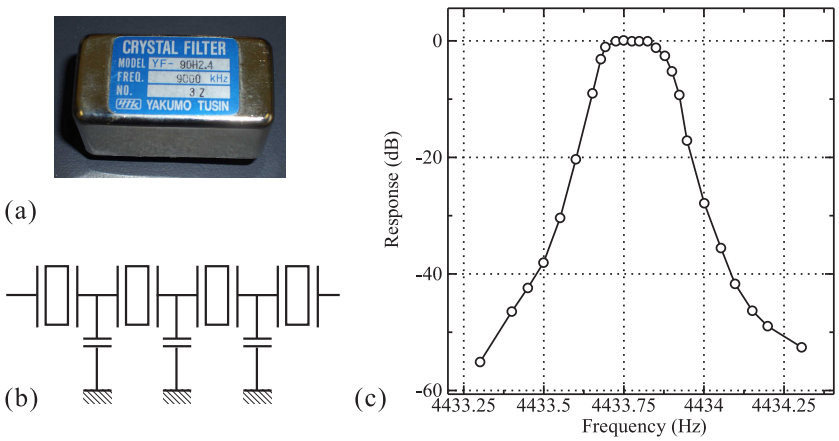


図 2.8 (a) クリスタルフィルターの外観例．(b) クリスタルフィルターの回路図．コンデンサが長方形を挟んでいる形状の記号は，水晶振動子を表す．(c) クリスタルフィルターの周波数特性例．4 素子 443kHz.

2.5 エネルギー散逸と電力

物理系を見るときの重要な視点がエネルギーとその保存 (時間推進対称性) である．すでにみたように，電子回路系の場合は各部品について入出力を規定する方程式が決まっていて回路を規定する方程式も電磁気学の制限によって決まるので，エネルギーについてそれほど意識することなく動作を理論的にシミュレートすることができる．しかし，もちろん，力学系とのアナロジーやマッピングを考える際には，エネルギー的視点が重要になる．

2.5.1 電源の取扱い

第 1 回で定義した「電子回路」の範囲は，電磁気的な結合をしている素子群のネットワークであった．それ以外の部分へエネルギーが移動したとすると，それは当該回路にとってはエネルギーの流出，エネルギー散逸 (energy dissipation) と捉えるべきである．抵抗器に，電流 J，電圧 V が印加されているとすると，素電荷を e として単位時間当たり $N = J/e$ 個の電子が注入されて還流する．還流電子は注入電子より，eV だけ静電エネルギーが減少している．抵抗器内部には電荷や磁束の蓄積，従って電磁エネルギー蓄積がないため，JV だけのエネルギー散逸が存在する．

電源を導入するとエネルギーの湧き出しが生じて，力学系としては扱いが面倒になる．一つの処方箋として，電源を対象とする電子回路から切り離し，「環境」として扱う，という方法が考えられる．例えば，定電圧電源であれば，接続された端子間の電圧を常に一定に保つように，一定の静電エネルギーを持つ電子を当該回路とやり取りしている，と考える．この場合，熱力学的に回路を扱うには，**エンタルピー** (enthalpy) を考えるのが便利である．復習すると，気体のエンタルピー H は内部エネルギー U，圧力 p，体積 V を用いて

$$H = U + pV$$

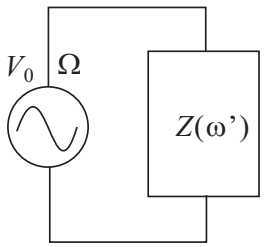
と書かれる．例えば，一定圧力のもとにある，というような環境下で δq だけの熱量をこの気体に与えた場合，体積変化 δV によってこの気体が環境に対して与える仕事は $p\delta V$ であるから，$\delta q = \delta U + p\delta V = \delta H$ と，熱の出し入れをエンタルピーで勘定できるのであった．電子回路の場合，電源がつながった状態で電荷の出し入れ δQ に対する電源の仕事を考える．定電圧電源の場合は容易で $V\delta Q$ であるから，何らかの遷移に伴って内部電磁エネルギーが δU，これに伴って定電圧電源が電荷 δQ を供給したとすると，

$$\delta H = \delta U - V\delta Q \tag{2.30}$$

となる．本講義でも後の方で電子回路の中で生じる量子現象を扱う際に必要となる (はずである)．

2.5.2 消費電力

端子の両端が一定振幅・周波数の電圧 $V_0 \cos(\omega t)$ にキープされるような交流電源を考える．



左図のように，これを丸に波模様で表す．インピダンス $Z(\omega')$ の素子に接続したとし，電圧 $V(\omega)$ に対して電流 $I(\omega)$ が流れる．この時，電流電圧の積

$$W(\omega) = V(\omega)I(\omega) \tag{2.31}$$

は一般に複素数であり，**複素電力**と呼ばれている．この内，実部 $P(\omega) \equiv \mathrm{Re}[W(\omega)]$ を有効電力 (effective power)，虚部 $Q(\omega) \equiv \mathrm{Im}[W(\omega)]$ を無効電力 (reactive power) と呼んでいる．インピダンスによってエネルギーとして消費されこの系から散逸されるのは，有効電力であり，無効電力は電源と素子との間のエネルギー循環を表している．

やや現実的なキャパシタのモデルとして，(2.25) で $L \to \infty$ としてインダクタの項を無視したモデルを考えてみると，

$$P(\omega) = \frac{V_0^2}{R}\cos^2\omega t, \quad Q(\omega) = \omega C V_0^2 \cos^2\omega t \tag{2.32}$$

である．ここで，循環するエネルギーに対してエネルギーが散逸される割合

$$\frac{P(\omega)}{Q(\omega} = \frac{1}{\omega CR} = \tan\delta \tag{2.33}$$

を**誘電正接** (dissipation factor)，$\delta = \mathrm{arg}W - \pi/2$ を損失角 (loss angle) と呼ぶ．これは，キャパシタの性能を表す重要なパラメーターとして前章でも (定義なしに) 触れてきた．

2.6 クラマース-クローニッヒの関係

伝達関数 (応答関数，線形応答率) の実部，虚部の問題を議論したところで，これらの間には極めて一般的な関係–クラマース-クローニッヒ (Kramers-Kronig) の関係があることを述べておこう．トリビアルに近いような簡単な関係であるにもかかわらず，実験的には極めて有用である．特に光学のような応答関数の実部，あるいは虚部の両方のスペクトルを取ることが面倒な測定では，片方だけを測定することで十分な情報が得られるので，KK 関係式の積分は実験の標準的な技術にもなっている．

2.6.1 伝達関数の一般的性質による証明

2.1.2 項で見たように，線形システムの伝達関数のフーリエ変換は，$t = 0$ でのインパルス応答 $\xi(t)$ から知ることができる．これは要するに，デルタ関数 $\delta(t)$ がすべての周波数の波を平等に足し合わせたもの，すなわち

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

であり，線形性から，その応答はすべての周波数入力に対する応答を平等に足し合わせたものになるため，ω 成分を抜き出せば良かったからであった．

因果性から，$\xi(t) = 0$ $(t \leq 0)$ であるが，これを強引に $-\infty < t < \infty$ で定義される奇関数成分 $\xi^{(\mathrm{o})}(t) = -\xi^{(\mathrm{o})}(-t)$ と，偶関数成分 $\xi^{(\mathrm{e})}(t) = \xi^{(\mathrm{e})}(-t)$ とに分けて，

$$\xi(t) = \xi^{(\mathrm{o})}(t) + \xi^{(\mathrm{e})}(t)$$

と書くと，符号関数 $\mathrm{sgn}(t) = 1$ $(t > 0)$，-1 $(t < 0)$ を使って $\xi^{(\mathrm{e})}(t) = \mathrm{sgn}(t)\xi^{(\mathrm{o})}(t)$，$\xi^{(\mathrm{o})}(t) = \mathrm{sgn}(t)\xi^{(\mathrm{e})}(t)$ である．

フーリエ変換すると．

$$\Xi(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[\xi^{(\mathrm{e})}(t) + \xi^{(\mathrm{o})}(t)]e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\xi^{(\mathrm{e})}(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{(\mathrm{o})}(t)\sin(\omega t)dt. \tag{2.34}$$

従って，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\Xi(i\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\xi^{(\mathrm{e})}(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\xi^{(\mathrm{o})}(t)\mathrm{sgn}(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{2\pi}i\mathrm{Im}[\Xi(i\omega)]\mathrm{Sgn}(\omega-\omega') = \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}(\Xi(i\omega))}{\omega'-\omega}d\omega'.\end{aligned} \tag{2.35}$$

$\mathcal{P}$ は主値積分を取ることを表す．これが，クラマース-クローニッヒの関係式の一方であり，もう一方は，全く同様に，

$$\mathrm{Im}[\Xi(i\omega)] = -\frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\Xi(i\omega))}{\omega'-\omega}d\omega' \tag{2.36}$$

と得られる．

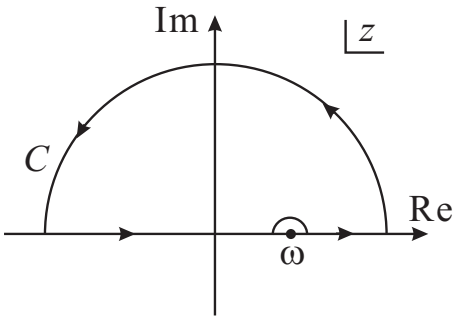
2.6.2 留数定理による証明

複素振動数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ に対する伝導率 $\Xi(\omega)$ をフーリエ変換して

$$\Xi(\omega_1 + i\omega_2) = \int_0^{\infty}\Xi(t)e^{i\omega_1 t}e^{-\omega_2 t}dt \tag{2.37}$$

とする．複素数 z の複素平面において，関数 $\Xi(z)/(z-\omega)$ を図のような積分路 C で一周積分することを考えると，積分路上では正則な関数であるからコーシーの定理より，一周積分はゼロである．

$$0 = \oint_C \frac{\Xi(z)dz}{z-\omega}.$$



この一周積分の内，直線部分の寄与は，外側の半円の半径を無限大，ω 周りの小半円の半径 ϵ を無限小とする極限を取り，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\omega-\epsilon}+\int_{\omega+\epsilon}^{\infty}\right]\frac{\Xi(z)dz}{z-\omega}=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Xi(z)dz}{z-\omega},$$

である．外側の半円の寄与は，$\Xi(z)$ が $|z|^{-1}$ より早くゼロに落ちるとするとこの極限でゼロである．小半円の寄与は，$\epsilon\to 0$ の小半円上の $\Xi(z)$ は $\Xi(\omega)$ で一定とし，

$$\Xi(\omega)\int_{\text{小半円}}\frac{dz}{z-\omega}=\Xi(\omega)\int_{\pi}^{0}\frac{i\epsilon e^{i\theta}d\theta}{\epsilon e^{i\theta}}=-i\pi\Xi(\omega)$$

である (図).

以上より，次の**クラマース-クローニッヒの関係式**が得られる．

$$\Xi(\omega)=\frac{P}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Xi(z)dz}{z-\omega}, \tag{2.38}$$

$$\mathrm{Re}\Xi(\omega)=\frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\Xi(x)dx}{x-\omega},\quad \mathrm{Im}\Xi(\omega)=\frac{-P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\Xi(x)dx}{x-\omega}. \tag{2.39}$$

2.7 4 端子 (2 端子対) 回路

これまで 2 端子の素子を単位として線形回路を議論してきたが，線形システムを入力 → 出力の系と捉えて，各インターフェースに独立に 2 つの端子を用意すると，最低で 4 端子が必要になる．従って線形回路では 4 端子回路 (2 端子対回路) を回路の構成ブロックとすることが良く行われる．そこで，ここで 4 端子回路とそれに付随する諸概念を導入しよう．

2.7.1 4 端子回路の定義

回路構成の基本ブロックとして図 2.9 のような 4 端子回路を考える．これは，回路の詳細部分に一種のマスクをして，入力と出力の間の関係のみを問題にする，ブラックボックス化であり，回路のマクロな解析に大変便利である．また，一種の伝送系あるいは変換器とみることもできる．また，回路の実装の上でも，理論とつきあわせる際に，4 端子のブロックに分けて動作確認するのは有効な手段である．

4 端子回路を考える場合も，その 4 つの端子にどのような電源をつなぐかによって特性を表す便利なパラメタは変化するが，わかりやすい考え方として，出力端子の J_{out}，V_{out} を使って入力端子の電流電圧 J_{in}，V_{in} を表す，というものがある．ここで，J，V 等はすべて ω 空間 (あるいは s 空間) で考えており，4 端子回路はすべて線形素子で構成されているとする．従って，インピダンス (アドミタンス) のネットワークと見ることができ，直流抵抗回路網と同様の合成解析ができる．入力端子は何らかの「電源」を接続することを考え，J_{in} は左下側の端子に還流する，とする．すなわちこのような境界条件を与えるとする．すると，キルヒホッフの法則より J_{out} は，右下側の端子から

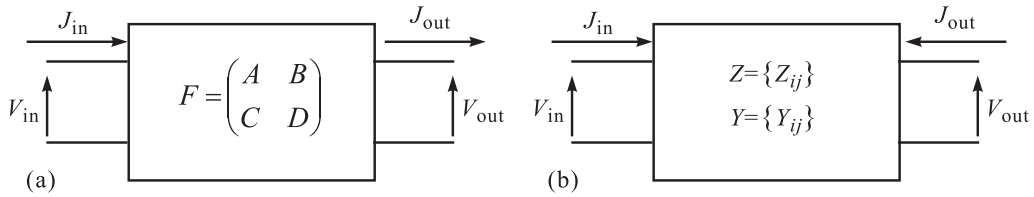


図 2.9 (a)4 端子回路の概念図．F 行列に使う外部パラメタ．(b) インピダンス行列，アドミタンス行列のためには，外部電流の向きを対称に取る．

流入しなければならない．この時，回路の線形性より

$$\begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathrm{out}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \equiv F \begin{pmatrix} V_{\mathrm{out}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

と表すことができるはずである．この F を**4端子 (F) 行列**，A, B, C, D を4端子定数と呼ぶ．

また，入力と出力を交替して，

$$\begin{pmatrix} V_{\mathrm{out}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{in}} \end{pmatrix} \equiv K \begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{in}} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

という書き方も可能である．

注意しなければならないのは，F 行列は入力と出力をつないではいるものの，必ずしも因果律を表しているわけではなく，外部につながれる回路や4端子回路のつなぎ方によって便利なパラメタが変化することである．4端子回路に与える物理量の種類や4端子回路が持つインピダンスの大きさなどによって，別の表現が便利になることもある．以下に，そのような様々なパラメタに対応する行列を示す．ただし，対称性のため，J_{out} の向きを図 2.9(b) のように F 行列とは反対にとる．

$$\begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ V_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \equiv Z \begin{pmatrix} J_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$\begin{pmatrix} J_{\mathrm{in}} \\ J_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ V_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \equiv Y \begin{pmatrix} V_{\mathrm{in}} \\ V_{\mathrm{out}} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Z を**インピダンス行列**，Y を**アドミタンス行列**と呼ぶ．この他にも**ハイブリッド (h) 行列**，**散乱 (S) 行列**など，良く使われるパラメタ行列がある．これらは，それぞれ，トランジスタ，高周波回路の項で改めて説明する．

なお，電気回路の教科書では，良く複素数であることをドット記号で明記している．$\dot{I}$，$\dot{V}$ などである (電気回路の教科書では，電流はほとんど必ず I または i で表し，虚数単位の i はこれと紛らわしいため，j を用いる．物理の皆さんは (受講者に電気・電子系の方がいらっしゃったら申し訳ないが)，複素数を特別扱いしたり (時間微分と紛らわしいこともある)，虚数単位の記号を変更することには抵抗があると思うので (というか，講師に抵抗がある)，このような記法は用いない．s 空間の関数を問題にしている，という点は重要である．