電子回路論 第 4 回

勝本信吾
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2014 年 10 月 22 日

前回のサマリー

共鳴現象　伝達関数絶対値のピークないしディップ，伝達位相の π 回転
エネルギー散逸　有効電力，無効電力
４端子回路　F 行列，インピダンス行列，アドミタンス行列

第 2 章 線形回路序論　2.7 ４端子回路 (続き)

2.7.2　4 端子回路の接続

つなぎ方によって便利なパラメタが変化することを見てみよう．図 2.10(a) のように４端子回路の出力を次の入力として次々と繋いでゆくことを**カスケード接続**と呼んでいる．カスケード接続の場合，全体の F 行列は簡単に

$$F_{\mathrm{tot}} = \prod_{i=1}^{N} F_i \tag{2.44}$$

となる．一方，２端子回路の直列接続に相当するのは，電圧が加算されるような接続法であるから，図**(b) のようになる．この時はインピダンス行列を使うのが便利で合成回路のインピダンス行列は $Z = Z_1 + Z_2$ と和で表される．同様に並列接続図**(c) では，合成回路のアドミタンス行列は $Y = Y_1 + Y_2$ となる．表 1 に２端子素子を接続して色々な４端子回路を形成した場合の F 行列についてまとめた．このような受動素子による４端子回路で，物理実験で良く使われるのが，フィルター回路である．例えば，T 型の回路で，Z_1，Z_3 にインダクタ，Z_2 にキャパシタを使えば，T 型ローパスフィルターとなる．フィルター回路については後の講義で取り上げる．

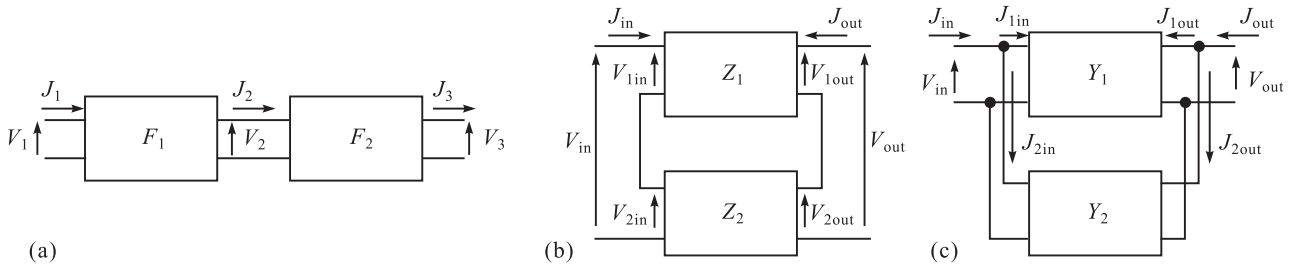


図 2.10　(a)4 端子回路のカスケード接続．(b) 直列接続．(c) 並列接続

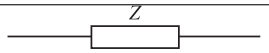
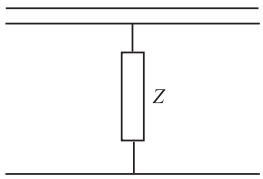
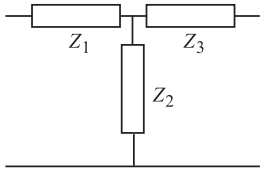
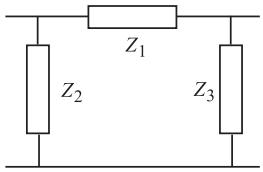
	A	B	C	D
直列素子 	1	Z	0	1
並列素子 	1	0	$\frac{1}{Z}$	1
T 型 	$1+\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1}{Z_2}$	$\frac{1}{Z_2}$	$1+\frac{Z_3}{Z_2}$
π 型 	$1+\frac{Z_1}{Z_3}$	Z_1	$\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_2Z_3}$	$1+\frac{Z_1}{Z_2}$

表 1　2 端子素子を接続して作った 4 端子回路と F 行列

2.8　端子対回路の諸定理

端子対回路では，様々な線形回路網理論が「定理」化されている．中には，ほとんど言い換えに過ぎないものも多い．以下，色々な定理あるいは言い換えを眺めておく．

線形回路であるからトリビアルなのが「重ね合わせの定理」であり，図 2.11(a) に示すように (この例は，4 端子回路ではなく 6 端子回路であるが)，電圧，または電流を決めている境界条件が複数あり，別の端子対に負荷を接続した場合，負荷に流れる電流は，それぞれの電源の「出力値」をゼロにした時の値の和となる．これについては，すでに 2.3.2 で述べた．

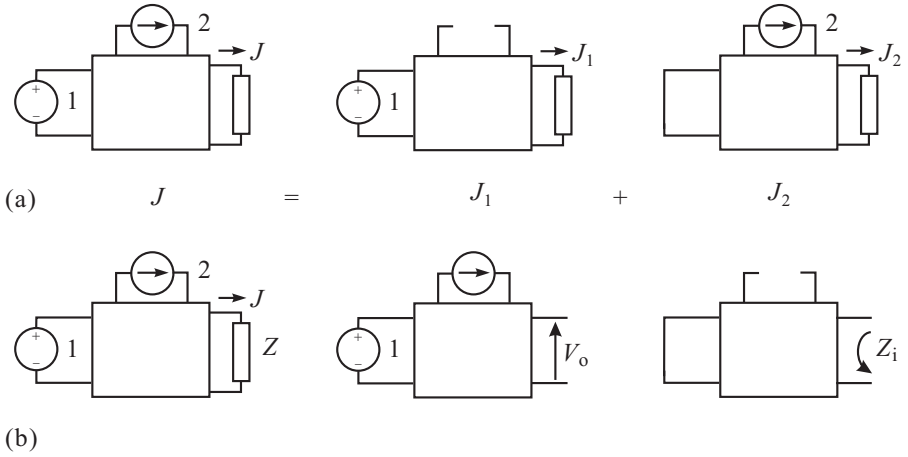


図 2.11　(a) 重ね合わせの定理．左辺の回路で右の抵抗器を流れる電流 J は，右辺第 1 項，定電流電源をオープンにした場合に流れる電流 J_1 と，第 2 項，定電圧電源をショートした時に流れる電流 J_2 との和である．(b) 鳳-テブナンの定理．インピダンス Z に流れる電流 J は，Z を開放した時に生じる電圧を V_o，電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピダンスを Z_i として，$J = V_o/(Z + Z_i)$.

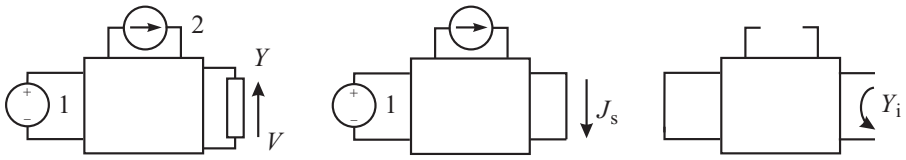


図 2.12　ノートンの定理．アドミタンス Y に生じる電圧 V は，Y を短絡した時に流れる電流を J_s，電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したアドミタンスを Y_i として，$V = J_s/(Y + Y_i)$.

鳳-テブナンの定理

鳳-テブナンの定理についても，2.3.2 項で述べた．6 端子回路で見ると，図 2.11(b) のようになる．すなわち，6 端子回路に電源が 2 つ，インピダンス Z が接続されている時，Z に流れる電流 J は，Z を開放した時に生じる電圧を V_o，電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピダンスを Z_i として，$J = V_o/(Z + Z_i)$ と書くことができる．これも，より一般的な形について証明済みである．

ノートンの定理

鳳-テブナンの定理のアドミタンス版．図 2.12 のように，鳳-テブナンでインピダンスと見たところをアドミタンス Y と考え，Y の両端に現れる電圧 V を求める．まず，Y を短絡して流れる電流 J_s を測定する．次に，Y を開放して電源の出力をいずれもゼロとし，出力側から測定したアドミタンスを Y_i とすると，

$$V = \frac{J_s}{Y + Y_i} \tag{2.45}$$

である．鳳-テブナンと言っていることは全く同じ．

補償の定理

これまた鳳-テブナンの定理の言い換えである．講義では触れない．やはり，電源がつながった回路の中のインピダンス Z を考える．左図の状態で電流 J が流れていたとする．インピダンスが ΔZ だけ変化したとし，中央図のように，これを補償する電源 ΔV をつないで，J が変化しないように調整する．$\Delta V = J\Delta Z$ である．次に右図のように電源の出力を例によってゼロにし，更に上記補償電源の向きを逆転する．この時，各導線に流れる電流 ΔJ_i は変化 ΔZ による電流変化を抽出したものである．

これは，中央の図と右の図を「重ね合わせ」て見れば明らかである．

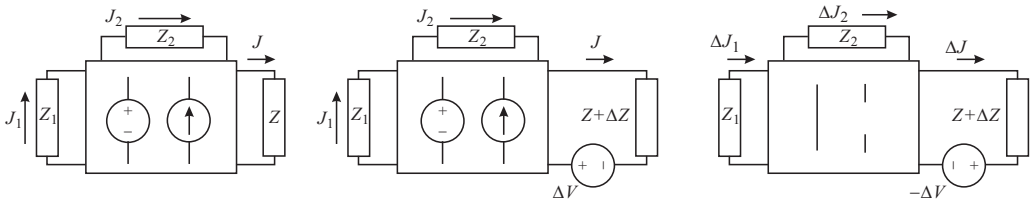


図 2.13　補償の定理．本文参照．

相反定理

ここで，相反定理について説明しておこう．４端子回路における相反定理は式では (**??**) のように簡潔に表すことができるが，物理的には様々な表現ができる．以下，2 種類紹介する．ここでは例によって直流の線形素子 (起電力，抵抗) による回路網に話を限るが，交流の場合もキルヒホッフの法則同様，複素数への拡張によって同様な定理が成立する．４端子回路，相反定理をめぐる，様々な物理の結びつきが [**?**] に紹介されている．

相反定理 (コンダクタンス)：４端子回路の入力，出力は便宜的な区別に過ぎないので，これを a，b と称する．a に

起電力 V をつなぎ，b を短絡した時に，b に流れる電流は，逆に b に V をつないで a を短絡した時に a に流れる電流に等しい．これは，アドミタンス (今の場合コンダクタンス) 行列で $Y_{12} = Y_{21}$ となっていることを示している．

相反定理 2(抵抗)：a に定電流源 J をつなぎ，b を開放した時に，b に発生する電圧は，逆に b に J をつないで a を開放した時に a に発生する電圧に等しい．これは，インピダンス (今の場合抵抗) 行列で $Z_{21} = Z_{12}$ となっていることを示している．

以上から，相反定理が成り立つ場合には，F，Z，Y の各行列の要素間に

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C}, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} \tag{2.46}$$

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}, \quad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B} \tag{2.47}$$

という関係が成立する．また，これより

$$|F| = AD - BC = 1 \tag{2.48}$$

であることもわかる．

2.9 インピダンスの整合

??節では，直流の定電圧電源 (起電力) について考えたが，ここでは電源の指定する電圧が時間変化する場合，すなわち交流電源 (交流起電力) について考える．この場合も全く同様に，理想電源と出力インピダンスの組み合わせの等価回路で考えることができる．

$$V_{\mathrm{out}} = V_0 - Z_{\mathrm{out}} J$$

この時，この電源に付けた負荷 Z によって消費される電力 P は，$J = V_0/(Z + Z_{\mathrm{out}})$ より

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(V_{\mathrm{out}} J^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{ZV_0}{Z + Z_{\mathrm{out}}}\frac{V_0^*}{(Z + Z_{\mathrm{out}})^*}\right) = \frac{|V_0|^2}{2|Z + Z_{\mathrm{out}}|^2}\mathrm{Re}(Z)$$

となる．P を Z の実部虚部それぞれについて停留点をとることにより，P の最大値 $P_{\max}$ は

$$P_{\max} = \frac{|V_0|^2}{8\mathrm{Re}(Z_{\mathrm{out}})} \tag{2.49}$$

で，これは

$$Z = Z_{\mathrm{out}}^* \tag{2.50}$$

の時に得られることがわかる．これを**インピダンス整合** (impedance matching) と呼び，この時電源能力が最も効率的に引き出される．

次に，インピダンス整合が取れていない場合に，回路の付加によってエネルギーの損失なしにインピダンス整合を取る方法を考える．エネルギー散逸を起こさないためには，付加回路は LC などのリアクタンスのみで構成されていなければならない．まず，(2.50) は満たされていないものの，$\mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(Z_{\mathrm{out}})$ である場合は，適当な LC 素子の付加によって (2.50) を容易に実現することができる．

抵抗の値が違っている場合 $\mathrm{Re}(Z) \neq \mathrm{Re}(Z_{\mathrm{out}})$ には，手続きがやや面倒であるため 4 端子回路の考え方が有効である．簡単のため，図 2.14 のように出力インピダンスと負荷が，それぞれ抵抗成分 R_{out}，R だけである場合を考えよ

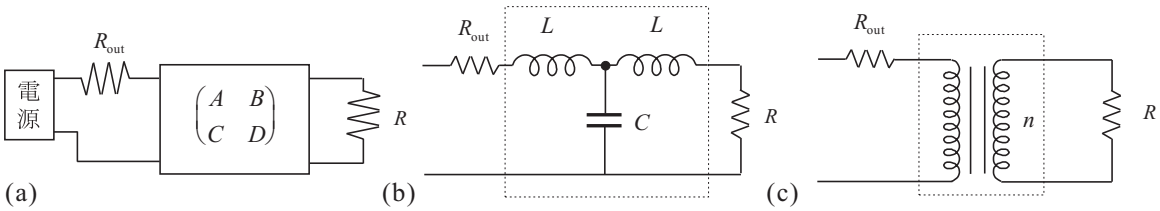


図 2.14　インピダンスの整合．(a) 状況設定．(b) キャパシタ，インダクタを使った整合．(c) マッチングトランス．

う．４端子回路の F 行列は (**??**) のように与えられているとする．(2.50) の条件より，まず，電源 (入力) 側からみて負荷の抵抗が $V_{\rm in}/J_{\rm in}$，また $R = V_{\rm out}/J_{\rm out}$ であることに注意すると，

$$R_{\rm out} = \frac{V_{\rm in}}{J_{\rm in}} = \frac{AV_{\rm out} + BJ_{\rm out}}{CV_{\rm out} + DJ_{\rm out}} = \frac{AR + B}{CR + D} \tag{2.51}$$

である．逆に負荷抵抗からみた時の電源の出力抵抗が整合する条件を考える．(2.48) から F 行列の逆行列が $\left(\begin{smallmatrix} D & -B \\ -C & A \end{smallmatrix}\right)$ であること，$R_{\rm out} = (V_0 - V_{\rm in})/J_{\rm in}$，負荷抵抗から見た時の電流の向きなどに注意すると

$$R = \frac{DV_0 - V_{\rm out}}{-J_{\rm out}} = \frac{DV_0 - DV_{\rm in} + BJ_{\rm in}}{CV_{\rm in} + AJ_{\rm in}} = \frac{DR_{\rm out} + B}{CR_{\rm out} + A} \tag{2.52}$$

となる．以上より，条件は

$$CDR_{\rm out}^2 - AB = 0 \tag{2.53}$$

となる．

(i) $ABCD \neq 0$ の場合は (2.53) の条件より

$$R_{\rm out} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad R = \sqrt{\frac{BD}{AC}} \tag{2.54}$$

の時に，整合が取れる．$\sqrt{\frac{AB}{CD}}$, $\sqrt{\frac{BD}{AC}}$ を「４端子回路を通してみると，あたかもそのようなインピダンスが接続されているように見える」という意味合いで，**仮想インピダンス** (image impedance) と呼ぶ．

(ii) $A = D = 0$ の場合にも解が考えられ

$$RR_{\rm out} = B/C \tag{2.55}$$

となれば良い．例えば，電源の振動数を ω とすれば，図 2.14(b) のような回路で $\omega L = (\omega C)^{-1} = \sqrt{RR_{\rm out}}$ とすれば良い．この方法は振動数によるので，単一振動数の電源にしか使えない．

(iii) $B = C = 0$ の場合．

$$R_{\rm out}/R = A/D \tag{2.56}$$

である．これはリアクタンスのみで一種の電圧増幅を行っているので，これにはトランスが必要である．巻き数比 n を

$$n = \sqrt{R/R_{\rm out}} \tag{2.57}$$

とすれば良い．これは理想的には電源振動数に依存しないので，マッチングトランスとして広く使われている方法である．

第 3 章 増幅回路

トランジスタなどの個別増幅素子に進む前に，ここで，これまで述べた波形伝達の一般論，2 端子素子，回路網理論を用いて増幅器とフィードバックの一般論を述べる．具体的な増幅素子の回路構成にはフィードバック回路は不可欠である．

3.1 増幅度 (利得)

増幅器 (amplifier) は一口に言って電気信号を拡大するものであるが，信号の種類，物理量，信号接地方式などによって様々な分類の仕方がある．直流信号，交流信号の増幅を行うものをそれぞれ，直流増幅器，交流増幅器という．ただし，その境界はあいまいで，交流増幅器は更に周波数帯域によって様々に分類される．一方物理量で分けると，**電圧増幅器**と**電流増幅器**に分けることができる．電場効果トランジスタ (FET) 回路は前者の，バイポーラトランジスタ回路は後者の例になっている．インダクタンス結合による昇圧トランスは広い意味での電圧増幅器である．ただし，電力ゲインがないため，増幅器の中に含めない人もいる．

増幅器の特性を示す最も重要な量は増幅度 (利得, gain) である．電圧増幅器の場合は電圧増幅度 A は入力信号電圧振幅 $V_{\rm in}$ に対する出力信号電圧振幅 $V_{\rm out}$ の比として定義される．

$$A \equiv \frac{V_{\rm out}}{V_{\rm in}} \tag{3.1}$$

但し，**差動増幅器**は，$+$ と $-$ の 2 つの入力端子を持ち，

$$V_{\rm out} = A(V_{\rm in+} - V_{\rm in-}) \tag{3.2}$$

と 2 つの入力電圧の差を増幅して，接地電位に対する電圧として出力する[*1]．OP アンプがその代表で，後で詳しく扱う．増幅作用を持つ回路についても，**??**節の議論は成立する。定義より電圧信号についての伝達関数の絶対値が増幅率になることがわかる。増幅度は無次元だが，対数をとって**デシベル** (dB) で表すことが多い．入力信号電力が $P_{\rm in}$，出力信号電力が $P_{\rm out}$ である時，増幅度が G_f dB である，というのは

$$G_f = 10\log_{10}\frac{P_{\rm out}}{P_{\rm in}} \tag{3.3}$$

を意味する．入力抵抗と出力抵抗が等しい場合には

$$G_f = 20\log_{10} A = 20\log_{10}\frac{V_{\rm out}}{V_{\rm in}} \tag{3.4}$$

となる．

電気回路では，電力や電圧の絶対値も dB に文字を付けた記号で表し，混同しやすいので注意が必要である．いずれも基本的な定義の仕方は上記と同じである．電力の場合 1mW を基準 ($P_{\rm in}$) に，(3.3) の式で定義した電力を dBm，同様に 1fW を基準にした電力を dBf で表す．一方，電圧は，1V を基準に (3.4) で定義した電圧を dBV，同様に 1μV を基準にしたものを dBμ で表す．

増幅器と反対に振幅を落とすものを**減衰器** (attenuator) と呼ぶ．これにも (3.1) を当てはめると，$A < 1$ となり，G_f は負となる．これを負のゲインと呼ぶこともある．

3.2 周波数特性とボード線図

電圧信号を考えることとし，増幅器の伝達関数を $W(s)$ としよう．角周波数 ω での電圧増幅率 $A(\omega)$ は $|W(i\omega)|$ である．**??**節と同様，$W(s)$ が発散する点を**極**，ゼロとなる点を**零**と呼ぶ．簡単のため，極も零もいずれも 1 次であ

[*1] 場合によっては出力も差動出力となる．

るとし，それぞれ，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，$\beta_1, \cdots, \beta_m$ とすると

$$W(s) = B\frac{(s-\beta_1)\cdots(s-\beta_m)}{(s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_n)} \tag{3.5}$$

と書く．入力が零になった後も出力が存在する場合，その時刻における「ゲイン」は無限大でなければならないから，このような出力は上記の極から発生している．極 α_i から発生する信号は，伝達関数の定義から $\exp(\alpha_i t)$ の関数形をしている．したがって，もし $\mathrm{Re}(\alpha_i) > 0$ であれば，このような出力が時間と共に増大してしまい，システムは**不安定**となる．即ち，**安定**であるためにはすべての極の実部が負でなければならない．

(3.5) を虚軸で切って周波数応答 $W(i\omega)$ としたものの絶対値の対数，およびその複素角は

$$\log|W(i\omega)| = \log|B| + \sum_{j=1}^{m}\log|(i\omega-\beta_j)| - \sum_{j=1}^{n}\log|(i\omega-\alpha_j)| \tag{3.6}$$

$$\arg(W(i\omega)) = \arg(B) + \sum_{j=1}^{m}\arg(i\omega-\beta_j) - \sum_{j=1}^{n}\arg(i\omega-\alpha_j) \tag{3.7}$$

となる．この 2 つを log スケールの ω または $f = \omega/2\pi$ に対してプロットしたものを，**ボード線図** (Bode diagram) と呼ぶ．もっと簡単に言うと、各周波数に対するゲインと位相回りを周波数に対して log-log プロットしたものである (但し位相回りはリニア)。log プロットを虚数 (log 絶対値, 偏角) にまで拡張したと考えると周波数に対する伝達関数の log-log プロットとも言える．

最も簡単な例として

$$W(s) = \frac{1}{a(i\omega)+1} \tag{3.8}$$

という単極の伝達関数の場合，図 20 のように極の付近でゲイン曲線が折れ曲がり，位相が $-\pi/2$ だけずれる特性が得られる．この位相のずれ方は実軸上に極がある場合の特徴で、原点から出発して虚軸上を無限大まで進む点 $(i\omega)$ からこの極を望む角が丁度 $\pi/2$ だけ変化することに対応している。