

物理屋のための電子回路論 第 10 回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2015 年 12 月 17 日

第 6 章 信号, 雑音, 波形解析

これまで電 (磁) 氣的信号を取り扱う文字通りの「回路」を考えてきた。この講義では伝統的に、この回路で取扱い、処理をする「信号論」を扱うことになっている。「信号論」はこれも極めて広大な分野であり、内容の選択が難しいところである。

まず、ゆらぎ、雑音の議論を避けて通ることはできない。現実の雑音には様々な種類がある。統計物理で扱うのは熱雑音やショット雑音など、物理系が本来的に持っている雑音である。揺動散逸定理は、ゆらぎ (雑音) とエネルギー散逸の関係を与える。電子回路でも無論重要であるが、恐らく「統計力学 I, II, 特論」などで詳しく学んでいるはずである。また、ポップコーン雑音、バルクハウゼン雑音など、回路素子内の内的要因による雑音だが回避可能なもの、も重要な雑音である。

電子回路論では、外部から飛来する電磁雑音の排除も極めて重要である。また逆に、特に高周波信号を扱う際に回路から飛び出してしまう電磁波による妨害 (electromagnetic interference EMI, あるいは, electromagnetic compatibility EMC) も大きな課題である。

信号波形論も、積分変換による波形解析, サンプリング論, また変調を用いた信号伝送工学など間口が広いが物理実験に役立ちそうなものを選んで講じる。

6.1 ゆらぎ

これまで、電位 (電圧), 電流を主に「信号」と考え、これらを表す入力関数 $f(t)$, 出力関数 $g(t)$ というように抽象化して議論してきた。しかし、これらの現実の物理量には必ずゆらぎが存在し、電子回路論の言葉では「雑音」である。雑音には様々な要因が存在し、要因によって分類することができる。この中で、外部から飛来する電磁ノイズは、電子回路的には極めて重要な問題であり、これを避けるための一般的な手法については後で簡単に紹介する。

物理量 x のゆらぎ δx , および平均 2 乗偏差 $\overline{(\delta x)^2}$ を

$$\delta x = x - \bar{x}, \quad \overline{(\delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (6.1)$$

で定義する。ゆらぎの平均はゼロ $\overline{\delta x} = 0$ である。 x の分布関数 $g(x)$ に対してそのフーリエ変換

$$u(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ixq} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.2)$$

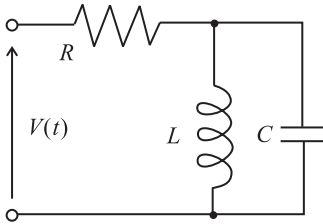
を考えると、 $u(q)$ をテーラー展開することで、

$$\bar{x}^n = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^n} \left[\frac{d^n}{dq^n} u(q) \right]_{q=0} \quad (6.3)$$

が得られる。従って、高次のモーメントが得られれば $u(q)$ を通して $g(x)$ が得られる (現実にはこれは多くの場合困難である)。 $u(q)$ を分布の特性関数という。

今、 δx を「ゆらぎ」、 $\overline{\dots}$ を「平均」としたが、何に対してゆらぐのか区別する場合もある。系（アンサンブル）を取り直すたびに何らかの確率過程が入って系の示す物理量に揺らぎが生ずる場合、各確率過程は独立事象である。ここでは、 $\overline{\dots}$ としてこのようなゆらぎに関する平均を意味することにする。これに対して、 x が何らかの確率的摂動によって時間 t に対してゆらぐ場合、 $x(t)$ の値は直前の値の影響を受けることになる。このような揺らぎに対する平均を $\langle \dots \rangle$ のように書くことにする。摂動が全くランダムで $x(t)$ は直前の値にのみ影響される場合を**単純マルコフ過程** (simple Markov process) と呼ぶ。 $x(t)$ がそれより前の m 個の値、 x_1, \dots, x_m から影響を受ける場合、これを m 重マルコフ過程と呼ぶ。

6.1.1 揺動散逸定理



久保亮五らによって確立・定式化された線形応答理論中の重要な要素、**揺動散逸定理** (fluctuation-dissipation theorem) の考え方を平たく言うと次のようになる。散逸のある系で散逸するエネルギーと外界（熱浴）から入り込むエネルギーがバランスして定常状態にあるとする。エネルギーのやり取りには揺らぎ（揺動）があり、これが熱力学諸量のゆらぎを生む。従って、散逸とゆらぎとの間に一定の関係が生じる。

何度も出てきた左図の散逸のある LC 共鳴回路を例に、揺動散逸定理の紹介だけをしよう。インピーダンス、アドミッタンスはそれぞれ、

$$Z(i\omega) = \frac{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad Y(i\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}$$

と表される ($\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$)。

この時、揺動散逸定理 (第 2 種) は、電圧 $V(t)$ の熱雑音パワースペクトル $G_v(\omega)$ として、

$$G_v(\omega) = 4k_B T \text{Re}[Z(i\omega)] \quad (6.4)$$

を与える。雑音がエネルギー散逸を生じる抵抗（あるいは、コンダクタンス）成分により生じるとしている。

上の回路に適用すると、

$$G_v(\omega) = 4k_B TR \quad (6.5)$$

となり、電圧雑音は ω に依存しない（白色）。(6.5) のような熱雑音を**ジョンソン-ナイキスト雑音** (Johnson-Nyquist noise) と呼ぶ。

6.1.2 ウィナー-ヒンチンの定理

ウィナー-ヒンチン (Wiener-Khintchine) の定理は、「揺動散逸定理」と呼ばれる一連の理論の一部である。結果だけ述べる。時間 t に対する揺らぎを持つ量 $x(t)$ に対して**自己相関関数** (self-correlation function) を

$$C(\tau) = \overline{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle} \quad (6.6)$$

で定義する。前に述べたとおり、 $\langle \dots \rangle$ は時間平均を意味し、 $\overline{\dots}$ は更にアンサンブル平均を取ることを意味している。

この時、振動数 ω に対する**スペクトル密度** (spectrum density, power spectrum) を $G(\omega)$ とすると、ウィナー-ヒンチンの定理は、

$$G(\omega) = 4 \int_0^\infty C(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (6.7a)$$

$$C(\tau) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega\tau \frac{d\omega}{2\pi} \quad (6.7b)$$

と書かれる。すなわち、時間揺らぎの自己相関関数とスペクトル密度はフーリエ変換で結ばれる関係にある。

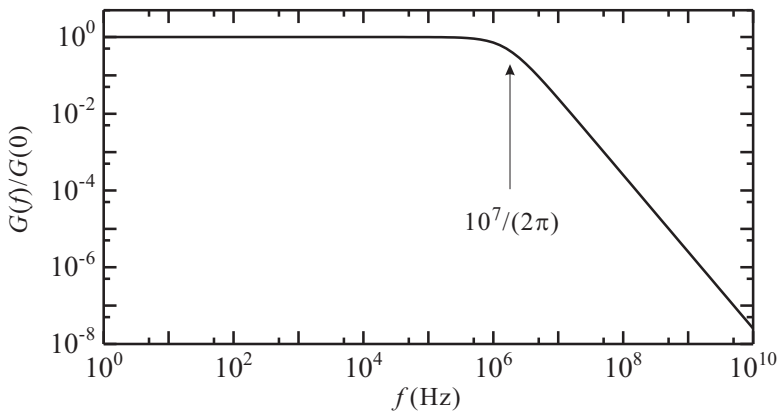


図 6.1 式 (6.9) で $\tau_0 = 1 \times 10^{-7}$ s (周波数で 10MHz) として $f = 0$ でのパワースペクトル $G(0)$ で規格化したスペクトル値を周波数 f の関数として log-log プロットしたもの. 増幅器 Bode ダイアグラムのように, $1/(2\pi\tau_0)$ の所に 2 次の「ポール」が現れている.

相関関数 $C(\tau)$ が

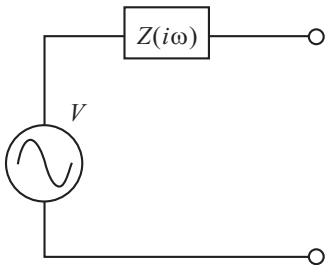
$$C(\tau) = \exp(-\tau/\tau_0) \quad (6.8)$$

と指数関数的であるとすると, パワースペクトル $G(f)$ は

$$G(f) = 4 \int_0^\infty e^{-\tau/\tau_0} \cos(2\pi f\tau) d\tau = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \quad (6.9)$$

である. これは無論, 図 6.1 のように, log-log プロットで $2\pi f\tau_0 = 1$ の所に 2 次の「ポール」を生じる関数である. 増幅器のところでも見たように, このポール以下の周波数ではスペクトルはほぼ f によらず白色であり, ポールを超えると f^{-2} で減少する.

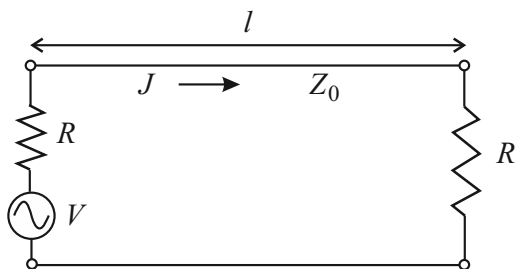
6.1.3 雑音の回路論的取扱い



これまで, 回路において雑音については考えてこなかったが, 例えばトランジスタを制御電源として表してしまっただけのように, 回路の言葉の上に乗せることを考える. 雑音は信号の上にゆらぎが乗っているものだと考えると, 回路の線形性を破るものではない. しかし, 何らかのエネルギー源によって様々な周波数の重ね合わせの「ゆらぎ信号」を発生させているとすると, 回路内エネルギー保存則を破るため, やはり「電源」として扱うのが適当であると考えられる.

(5.4) の揺動散逸定理は, インピーダンス $Z(i\omega)$ に生じる電圧ゆらぎを扱っているので, 左図のように, 雑音の存在しない出力インピーダンス $Z(i\omega)$ と, 「雑音電圧電源」 V の組み合わせが考えられる. 場合によっては雑音電流電源を考える. 以下, 雑音電圧電源の物理的性質として, 線形性を仮定する. 特に平均特性そのものが非線形な素子ではこれは多くの場合成立しないが, これまでも見たように, 小振幅近似などにより線形近似が適用できるとする.

6.1.4 ナイキストの定理



熱雑音に関するナイキストの定理 (Nyquist theorem) は, これも揺動散逸定理の一部であり, 具体的には (6.5) の形で, 抵抗 R の両端に生ずる電圧熱雑音を (6.5) として与えるものである. これには, 電子回路の研究者でもあったナイキストらしい, 大変直観的な説明がある.

左図のように, 抵抗値 R の抵抗体 (ノイズ源 V を含む) にインピーダンス整合 ($Z_0 = R$) した長さ l の伝送線路を接続し, もう一方の端も R の抵抗体で終端する. 伝送線路の Z_0 はすべてリアクタンス, すなわち直流抵抗はゼロ (無損失) とする. この伝送線

路を伝わる信号 (電磁波) の速さを c^* とする. 伝送線路は終端の抵抗以外では外界から切り離されており, 終端抵抗を通して外界とエネルギーをやり取りし, 抵抗体と熱平衡にあるとする. この時, 右側の負荷抵抗でも熱雑音の発生があるはずであるが, 考慮しない, というのは, 今考えているのは左側の雑音電源であり, 仮に右を考えたとしても線形性により重ね合わせが生じるだけで何も推論に影響を与えないからである.

伝送線路上に存在するモードの密度を考えるため, 長さ l で周期境界条件を取ることにすると, n 番目のモード ω_n は

$$\omega_n = c^* k_n = \frac{2\pi n c^*}{l} \quad (6.10)$$

である. 従って, 1つのモードあたりの振動数幅は, $\delta\omega = 2\pi c^*/l$ となる. この「モード」は双方向なので, 自由度 2 を持っている.

エネルギー $\hbar\omega$ のフォトンについて確認しておく, ボース分布 $f(\hbar\omega, T) = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ に従い, 1 自由度あたりのエネルギー密度は

$$\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \sim \frac{\hbar\omega}{1 + (\hbar\omega/k_B T) - 1} = k_B T \quad (k_B T \gg \hbar\omega) \quad (6.11)$$

である. 従って, 振動数幅 $\Delta\omega$ あたりの熱雑音 (フォトン) のエネルギーは

$$2 \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} k_B T = \frac{2k_B T l}{2\pi c^*} \Delta\omega \quad (6.12)$$

となる.

伝送線の端はインピーダンスマッチしているため, 熱雑音フォトンが反射されることなく端から流れ出て終端抵抗に吸収される. (6.12) のエネルギーの内, 半分が一方の方向へ進むから, 単位時間内に片方の端から流れ出る $\Delta\omega$ あたりのエネルギーは, 単位長さあたりのエネルギーにするため $1/l$ を乗じ, フォトン速度 c^* を乗じることで,

$$\frac{k_B T l}{2\pi c^*} \Delta\omega \times \frac{1}{l} \times c^* = k_B T \Delta f \quad (2\pi f = \omega) \quad (6.13)$$

である. この分が反対側から供給されているはずであるから, 左の「ノイズ電源」は単位時間当たりこれだけのエネルギーを伝送線に供給しているはずである. 負荷に流れる電流を J として, 上のエネルギーが $\overline{J^2} R$ になること, また, 図からわかるように, 電流は $2R$ の直列抵抗を巡回する形になる (伝送路に負荷 R がつながった状態を右から見ると, インピーダンス R に見える) ので, 片側の抵抗の電圧を V とすると, $J = V/2R$ となることから,

$$\overline{J^2} R = k_B T \Delta f, \quad \overline{V^2} = 4R k_B T \Delta f \quad (6.14)$$

となる. これが, (6.5) と同じものを意味している (今考えているのは雑音そのものの電力であるから $V \rightarrow \delta V$ とする) ことは明らかである. また, (6.14) より

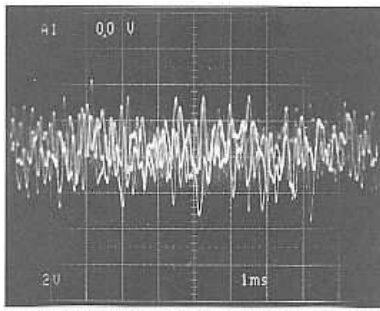
$$\sqrt{\overline{J^2} \overline{V^2}} = 2P = 2k_B T \Delta f \quad (6.15)$$

となる. P はノイズ電力で, 2倍が付いているのは交流電力の時間平均を取っているからである.

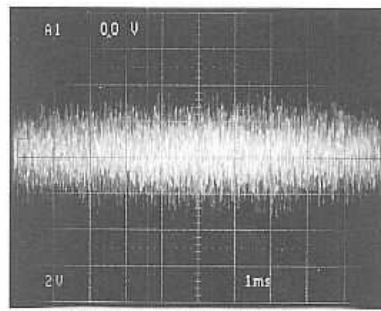
ジョンソン-ナイキスト雑音 (6.5) の表式は, 抵抗値がほとんど温度に依存しない合金などの抵抗器を使うと (無論, 温度に依存する場合でも各温度で抵抗 (の平均値) を測れば良いが), 雑音パワースペクトルを測定することで温度が測定できることになる. この雑音温度計の特徴は, 他に温度標準を必要としないことで, 温度計の分類としては 1 次温度計に属する. 特に高い温度では高温近似が広い周波数範囲で良好で, 雑音も熱雑音が主になることから良く使用されている.

更に, ジョンソン-ナイキスト雑音とは限らない雑音源があったとして, バンド幅 Δf に対する雑音電力を P として $P/k_B \Delta f$ を雑音温度 (noise temperature) と呼ぶことがある.

以上, 熱雑音について, 周波数軸上で平ら (白色) になる, というのを見てきたが, これを時間軸上で見ると, 図 6.2 のようになる. これだけではわかりにくい, 確率過程であることを反映して, 雑音振幅を統計集計すると, ガウス分布になっている.



a) 上限周波数5 kHz (-3dB) 1 V_{rms}の熱雑音を1 ms/divで観測



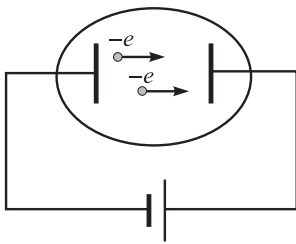
b) 上限周波数100 kHz (-3dB) 1 V_{rms}の熱雑音を1 ms/divで観測

図 6.2 抵抗の熱雑音を(ローパス)周波数フィルターを通して増幅した後、オシロスコープで観察したもの。(a) 上限周波数 5kHz (-3dB), (b) 上限周波数 100kHz (-3dB). [2] より.

6.1.5 ショット雑音

電流の起源である電荷キャリアは、一般に電子のように粒子である。電流がキャリアの確率的 (stochastic) な運動によって引き起こされているとすると、それによって揺らぎが生じる。この揺らぎ(ノイズ)を**ショット雑音** (shot noise) あるいは**ポアソン雑音** (Poisson noise) と呼ぶ*1。

ショット雑音が顕著になるのは、測定している電流に寄与する粒子数が小さくなった場合である。また、その発生要因からわかるように、ジョンソン-ナイキスト雑音と違って温度を下げても消えることはない。



図のように、真空中に対抗電極を置いて電圧を印加し、一方の電極(カソード)から電子が飛び出して他方(アノード)に飛び込むことで流れる電流を考える。カソードから飛び出した電子は強電場によって加速されアノードに飛び込むが、電場が十分強ければ、飛び出した時の初速のばらつきは無視できるので、この電流のショット雑音は電子がカソードから飛び出す確率過程によっている。

ショット雑音のスペクトルを次のように考えて求めよう。上記のようにショット雑音を生じるような電荷の運搬過程では電荷 e が真空管を横切って(他のモデルでも、これに相当するプロセスがあるはずである)電極に到達する時間は、ゆらぎの測定時間幅 τ に比べて無視できるほど短い。すなわち、電流は時間軸上のデルタ関数列で表され、デルタ関数の周波数スペクトルは完全に白色で一定である。

まず、1個の電子による電流 $J_e(t) = e\delta(t - t_0)$ を考えると、

$$J_e(t) = e \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi if(t-t_0)} df = 2e \int_0^{\infty} \cos[2\pi if(t-t_0)] df$$

となって、どの周波数成分に対しても一様な振幅 $2e$ を有する。この余弦波振動成分を、1個の電子のその周波数における「ゆらぎ」と考える。これらは $t = t_0$ でコヒーレントであるが、ここから離れると無相関である。無限小幅のバンド df を考え、 df に属する周波数成分で周期平均を取ると、

$$\delta J = d\sqrt{\langle J_e^2 \rangle} = \frac{2e}{\sqrt{2}} df = \sqrt{2} e df$$

である。次に、2個めの電子が飛んできて電流が2つのデルタ関数で表されるとする。2つのデルタ関数の決まった周波数のゆらぎ成分の間には一定の位相関係があるから、ある f に対する2つの電流ゆらぎを j_p, j_q で表すと、

$$\overline{\langle \delta j^2 \rangle} = (j_p + j_q e^{i\phi})(j_p + j_q e^{-i\phi}) = j_p^2 + j_q^2 + 2j_p j_q \cos \phi$$

となる。しかし、このプロセスを何度も繰り返してアンサンブル平均を取ると、結局プロセス間の ϕ は無相関であるから最後の干渉項は消える。すなわち、

$$\overline{\langle \delta j^2 \rangle} = j_p^2 + j_q^2 = 2 \times (\sqrt{2} e)^2 df$$

*1 これも当然ながら電氣的雑音に限らず、何らかの粒子の流れがもたらす物理量すべてに存在する揺らぎである。

である。同様に、電子数を増やして単位時間あたり平均 N 個にしたとすると、 $\bar{J} = eN$ より帯域 Δf に対する電流揺らぎは

$$(\delta J)^2 = N \times 2e^2 \Delta f = 2e\bar{J}\Delta f \quad (6.16)$$

という形に得られる。

pn 接合 (4.3.1 節) では (揺らぎを平均した) 電流電圧特性は

$$J(V) = J_0 \left[\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right] \quad (4.10)$$

であった。これを、微分抵抗 $r_d = dV/dJ$ を J の関数として表す形にすると、

$$r_d = \left(\frac{dJ}{dV}\right)^{-1} = \left[\frac{eJ_0}{k_B T} \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right)\right]^{-1} = \frac{k_B T}{e} \frac{1}{J + J_0} \quad (6.17)$$

となる。順方向電圧が印加され $J \gg J_0$ である状況を考え $r_d \sim k_B T/eJ$ と近似すると、(6.16) より、

$$(\delta J)^2 = 2e \frac{k_B T}{er_d} \Delta f = 4k_B T \frac{1}{2r_d} \Delta f \quad (6.18)$$

であり、 δV の表式にすると、

$$(\delta V)^2 = 4 \frac{r_d}{2} k_B T \Delta f \quad (6.19)$$

と、熱雑音と類似の形になる。

6.1.6 1/f 雑音

熱雑音とショット雑音に対してパワースペクトルが大まかに周波数 f の逆数に比例する雑音群があり **1/f 雑音** (あるいはフリッカー雑音) と呼ばれている。「雑音群」と書いたように、1/f 雑音の原因は様々であり、ゆらぎの発生メカニズムにより周波数依存性も $1/f^\alpha$ で、 $0.8 \leq \alpha \leq 2$ と必ずしも $1/f$ ではない*2。1/f ゆらぎは 1970 年代以降広く研究され、様々なゆらぎが 1/f 特性を示すことがわかってきた [4]。人間の快不快に関係しているという説もあり、意図的に 1/f でゆらぐ扇風機なども売りだされた。

電子回路で重要な半導体素子やその他のアクティブ素子で 1/f 雑音が顕著となり始めるのは 1kHz 以下で、100Hz 以下では熱雑音よりも大きくなる。現象論的には、

$$(\delta V)^2 = K J^\alpha (1/f^\alpha) R^2 \Delta f \quad (6.20)$$

のように書かれる。

6.1.7 雑音の「単位」

以上見てきたように、雑音は、周波数帯域あたりのパワースペクトル(電圧、電流)で表されるので、これを小文字で書いてバンド Δf の標記を略すことが多い。

$$\overline{j_n^2} = \overline{\delta J^2} / \Delta f, \quad \overline{e_n^2} = \overline{\delta V^2} / \Delta f \quad (6.21)$$

のような具合である。ここで、電圧のノイズスペクトル標記に e という素電荷や自然対数の底と紛らわしい文字を使用した。これも電子回路で良く使用される記号で、添字を付けて混乱を避ける。また、これからわかるように、「雑音電流」、「雑音電圧」の単位として、 $\overline{j_n^2}$ 、 $\overline{e_n^2}$ の平方根に相当する $A/\sqrt{\text{Hz}}$ 、 $V/\sqrt{\text{Hz}}$ が使用される。

6.1.8 その他、実用上重要な雑音

電子回路素子に内在する雑音で様々な原因による雑音について見ておこう。これらも、回路実装の際の部品選択などで考慮する必要がある。

*2 研究者によっては、1/f にならないものは 1/f 雑音と呼ばない、という人もいる。

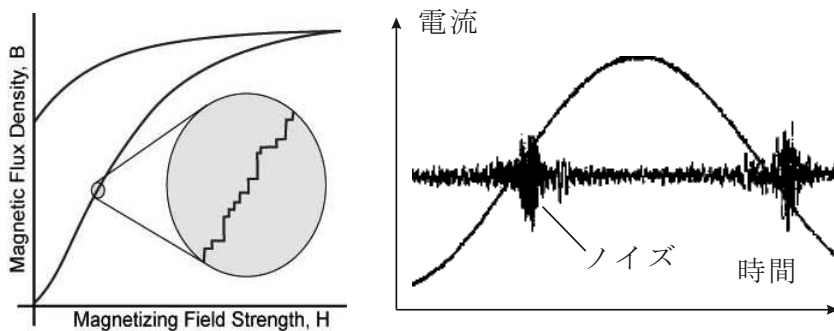


図 6.3 バルクハウゼン雑音. 左: 磁性体の M-H 曲線を拡大してみると, 特に遷移領域で磁区の運動に伴い, 細かな階段状構造が表れている. 右: トランスなどに交流を加えて出力ノイズを調べると, 磁区の離散的な運動に伴って, 特に電流がゼロを切る, 磁性体が遷移領域にさしかかる付近で特異的に雑音が増加する様子が見られる.

バルクハウゼン雑音

2つのコイル(インダクタ)を磁氣的に結合して, 交流を伝達できるようにした素子がトランスフォーマーと呼ばれるもので, 単一コイルの自己インダクタンスに対して**相互インダクタンス**で特徴づけられる. このように磁氣的な結合を持ちいる素子でしばしば使用されるのが**強磁性体**(ferromagnet)であり, 磁束を有効的に磁性体内に閉じ込めることができる.

ところが, ここで問題となるのが**バルクハウゼン雑音**(Barkhausen noise)と呼ばれるもので, 磁性体の**磁壁**(magnetic domain wall)の確率的な動きによって生じる. 強磁性は多くの場合, 物質内の局在磁気モーメントが空間的な向きをそろえることで生じるが, 外部磁場に応答して物質全体の磁気モーメントは変化する. これは, 磁性体内部に**磁区**(magnetic domain)と呼ばれる小区画が生じて磁束をループ状に閉じ込めて磁気エネルギーを下げており, 外部磁場に応じてこの区画の区切りである磁壁が動いて全体のモーメントを変化させるからである. 磁壁は境界面の局在磁気モーメントが向きを変えることで運動するが, しばしば不純物や多結晶粒界など物質の不完全性にトラップされ, その動きは確率的になる. これによる雑音がバルクハウゼン雑音である.

このような事情は**強誘電体**(ferroelectric)でも同じであり, 従って強誘電体を絶縁物質に使用して容量を稼いでいるキャパシタ(セラミックキャパシタなど)でも同様なノイズが発生する. バルクハウゼン雑音はショット雑音同様, 確率過程によって生じるが, 磁気モーメント, 誘電分極等が段階的に変化(電信的(telegraphic)と表現する)するのが特徴で, ショット雑音に比べるとその統計性も普遍性に乏しく, 物質の特性に強く依存する. 磁壁, 誘電壁のトラップされやすさは温度にも敏感であり, 低温では強いトラップのために素子特性そのものが劣化して使用に耐えなくなる.

ポップコーン雑音

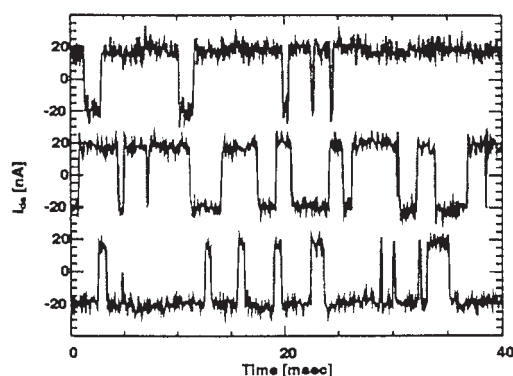


図 6.4 ポップコーン雑音の例. Wikipedia より.

半導体素子では, 空間電場領域に格子欠陥などがあって, 双安定(安定状態が2つあって, その間を何らかの刺激によって行き来できること)になっていると, 安定状態間の遷移に伴って出力が変化し, やはり2つの決まった値の間を往來するようになって, これが雑音となる. オーディオアンプ出力として聞いていると, ポップコーンがはぜているようなパチパチという音になって聞こえるため, **ポップコーン雑音**と呼ばれる.

ポップコーン雑音がある時の出力は, 図 6.4 のように, やはり2値の間を行き来する電信的雑音になっている.

マイクロフォン雑音

これは外来雑音に分類すべきものかもしれないが, 回路実装と関係したものである. 原因は簡単で, 回路内に機械的に動きやすい部分(可変キャパシタの羽や, シールドケースの

薄くて面積が大きな部分など)があり、浮遊容量を形成していると、これが外部あるいは内部で生じる音波によって振動することで雑音を生じる。

アバランシェ雑音

接合ダイオードに大きな逆方向電圧を加えると、ある電圧で空間電場領域に飛び込んできたキャリアが衝突電離を起こしてキャリア増殖を行い、大きな逆方向電流が流れるようになる。これを電子なだれ(アバランシェ, avalanche)現象と呼ぶ。この現象は、高速応答する光検出器などに使用されるが、この時、電流は衝突電離が確率過程で生じているため不安定で、多くのノイズを含む。これをアバランシェ雑音と呼んでいる。

6.2 増幅器の雑音

6.2.1 雑音指数 (Noise Figure)

6.1.3 節のように電源として雑音を取り扱えと、増幅器で雑音がどのようになるか、等価回路を使って容易に考えることができる。すなわち、下の図のように、全くノイズのない理想増幅器を考え、その入力部分に雑音電源が付いているとする。

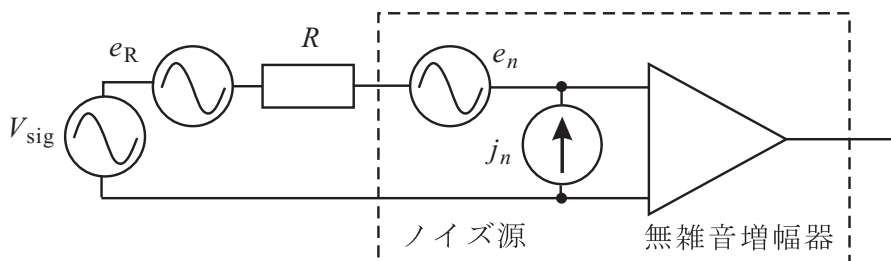


図 6.5 増幅器の雑音を考えるための等価回路。無雑音増幅器の入力部分に雑音電源が存在する。

この回路から、増幅器の電力利得を G_p と置いて、

$$\delta e_{\text{intotal}}^2 = e_{\text{out}}^2 / G_p = j_n^2 R^2 + e_R^2 + e_a^2 \quad (6.22)$$

である。

図 6.5 のような増幅器モデルにおいては、増幅器(破線内部)を通すことで、信号対雑音比 (SN 比, signal to noise ratio) は必ず悪化する。S/N 比と書くこともあり、電圧の 2 乗、あるいは電力で見た信号と雑音の比である。この時、雑音指数 (noise figure) は

$$\text{NF} = 10 \log_{10} \frac{(S/N)_{\text{in}}}{(S/N)_{\text{out}}} = 10 \log_{10} \frac{S_{\text{in}} N_{\text{out}}}{S_{\text{out}} N_{\text{in}}} \quad (6.23)$$

と定義される。これは、(3.3) 式の、増幅度を dB で表したのと同じ表式であり、S/N 比劣化の度合いを示すものである。

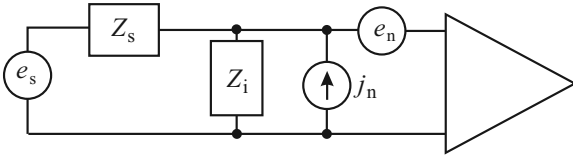
$$N_{\text{out}} = G_p \overline{e_N^2}$$

であるから、

$$\text{NF} = 10 \log_{10} \frac{S_{\text{in}} G_p \overline{e_N^2}}{S_{\text{in}} G_p \overline{e_R^2}} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_N^2}}{\overline{e_R^2}} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_n^2} + \overline{e_R^2} + \overline{j_n^2 R^2}}{\overline{e_R^2}} \quad (6.24)$$

となる。

6.2.2 ノイズインピーダンスマッチ



次に、左図のように増幅器の入力インピーダンス Z_i を考えて、信号源の最適インピーダンスを考える。この場合、増幅器の入力で換算した雑音温度 T_a と、これにマッチした最適信号源抵抗 R_{bs} は

$$T_a = \frac{\sqrt{e_n^2 j_n^2}}{2k_B}, \quad R_{bs} = \sqrt{\frac{e_n^2}{j_n^2}} \quad (6.25)$$

で表される。この回路全体を右から見たときの雑音温度 T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\text{Re}(1/Z_i)}{\text{Re}(1/Z_s)}\right) \frac{T_a}{2\text{Re}Z} \left(\frac{|Z|^2}{R_{bs}} + R_{bs}\right), \quad \frac{1}{Z} \equiv \frac{1}{Z_i} + \frac{1}{Z_s} \quad (6.26)$$

となる。 Z_i を調整してこの T_n を最小にする条件は

$$Z_i = \frac{1}{R_{bs}^{-1} - Z_s^{-1}} \quad (6.27)$$

で、この時、 T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\text{Re}(1/Z_i)}{\text{Re}(1/Z_s)}\right) T_a \quad (6.28)$$

となる。(6.27) の条件をノイズマッチングと呼ぶ。

参考文献

- [1] C. Kittel, "Elementary Statistical Physics", (Dover, 2004).
- [2] 遠坂俊昭「計測のためのアナログ回路設計」(CQ 出版社, 1997).
- [3] Anton F. P. van Putten, "Electronic Measurement Systems", (IOP pub., 1996).
- [4] 寺本英, 広田良吾, 武者利光, 山口昌哉「無限・カオス・ゆらぎ」(培風館, 1985).

付録 H: ナイキストの定理の古典電子運動論

抵抗値 R を持つ抵抗体を考え、その電子濃度 n 、電流を流す方向の長さ l 、断面積は S であるとする。電子の平均移動速度を v として、

$$V = JR = RSnev \quad (H.1)$$

である。 v は、抵抗体中の全電子の電流方向速度の平均とする。すると、 Sln は抵抗体中の全電子数であるから、電子に指数 i を付けて

$$Slnv = \sum_i v_i$$

となり、(H.1) より、

$$V = \frac{eR}{l} \sum_i v_i \equiv \sum_i V_i \quad \left(V_i \equiv \frac{eRv_i}{l}\right).$$

この式において、 V_i はあたかもそれぞれの電子が受け持つ電圧であるかのような形状をしている。それぞれの電子は加速と散乱を繰り返しており、その電流方向成分 v_i はゆらぎを持つ確率変数であるから、 V_i も同様である。そのパワースペクトルを $G(f)$ と書くと

$$\overline{V_i^2} = G(f)\Delta f.$$

相関関数は (6.8) のように電子の運動量緩和時間 τ_0 で減衰すると考えられる。

$$C(\tau) = \overline{V_i(t)V_i(t+\tau)} = \overline{V_i^2} \exp(-\tau/\tau_0).$$

(6.9) より,

$$G(f) = 4 \left(\frac{eR}{l} \right)^2 \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \quad (\text{H.2})$$

である. 回路の議論 (6.1.4 節) では見られなかったカットオフ (ポール) 周波数が現れているが, これは, 金属中の電子の運動量緩和時間によるもので回路の議論では生じなかったのは当然である. これはピコ秒以下の領域であり, 無視し, 白色スペクトル領域で考える.

エネルギー等分配側より,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} k_B T \quad \therefore \overline{v^2} = \frac{k_B T}{m}$$

であるから,

$$\overline{V^2} = nSl \overline{V_i^2} = nSlG(f)\Delta f = nSl \cdot 4 \frac{k_B T}{m} \left(\frac{eR}{l} \right)^2 \tau_0 \Delta f = 4k_B TR \Delta f \quad \therefore \sigma = \frac{ne^2\tau_0}{m}. \quad (\text{H.3})$$