

講義ノート 磁性 第8回

2022年6月1日 勝本信吾 東京大学物性研究所 (理学系研究科物理学専攻)

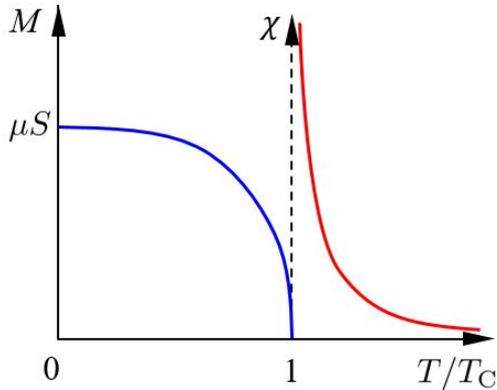


図 5.1 分子場近似により得られた, $T > T_C$ での帯磁率 χ , $T < T_C$ での自発磁化 M の振舞いを模式的に描いた.

前回より, 磁性絶縁体のモデルとして, ハイゼンベルク模型を考えている. 平均場 (分子場) を導入し, ブリュアン関数の展開 (式 (5.6)) により得られた方程式からキュリー-ワイス則

$$\chi = \frac{\mu^2 S(S+1)}{k_B} \frac{1}{T - T_C} \quad (5.8)$$

を導くことができた. $T < T_C$ では, $B = 0$ に対して, $M \neq 0$ の解が存在し, T_C 近傍では, 展開式 (5.6) で M^3 の項まで拾って,

$$M = \mu \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{S(S+1)}{\sqrt{(S+1)^2 + S^2}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_C}} \quad (5.9)$$

が得られる.

$T \ll T_C$ では, 逆にブリュアン関数の $x \gg 1$ に対する近似

$$B_S(x) \sim 1 - \frac{1}{S} \exp\left(-\frac{x}{S}\right) + \left[\frac{2S+1}{S} \exp\left(-\frac{2S+1}{S}x\right)\right] \quad (5.10)$$

の最初の 2 項から,

$$M = \mu \left[S - \exp\left(-\frac{3}{S+1} \frac{T_C}{T}\right) \right] \quad (5.11)$$

となり, $T \rightarrow 0$ で完全な磁化 μS に漸近する. 平均場近似での, χ と M の温度依存性を, 図 5.1 に模式的にまとめた.

5.2 強磁性相転移の現象論: GL 理論

以上の簡単な扱いの中に, 強磁性相転移の協力現象 (cooperative phenomena) としての特性が現れている. 例えば, 式 (5.8) では, $T \approx T_C$ で

$$\chi \propto \frac{1}{1 - (T_C/T)} = 1 + \frac{T_C}{T} + \left(\frac{T_C}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_C}{T}\right)^3 + \dots$$

であり, 隣接サイトが作る有効磁場によって, T_C/T だけ余分に偏極が生じ, 隣接サイトにも同様に余分な偏極が生じてこれが更に余分な偏極を生む, という無限の循環が生じる. $T = T_C$ で収束半径に達したところで自発磁化が生じる. このように簡単な模型ではあるが, 一応, 実体的な強磁性発現機構を考えたものであることがわかる.

そこで, 相転移の極めて一般的な性質からの議論を眺めて, 平均場近似で見たこととどのように対応しているか考えてみよう.

5.2.1 自由エネルギー

ここで取り上げるのは, 相転移の Ginzburg-Landau (GL) 理論である [1, 2]. 超伝導転移および超伝導を現象論的に理解するために導入されたが, 広範囲の相転移現象に適用可能であり, その後の臨界現象研究に大きな影響を与えた [3, 4]. これは, 自由エネルギーを, 磁化のように転移点で有限値を取るようなパラメータの関数として考え, 熱

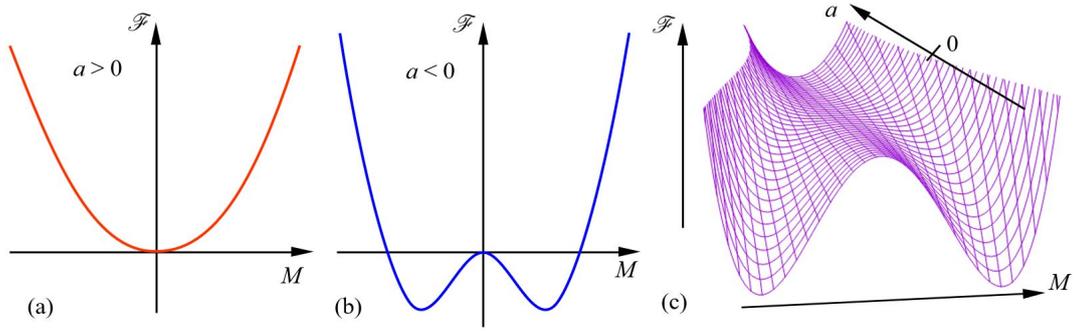


図 5.2 GL 理論で，自由エネルギー \mathcal{F} の M によるべき展開式 (5.14) の概形. (a) $a \geq 0$ の場合. (b) $a < 0$ の場合. (c) a を連続的に変化させ， \mathcal{F} をワイヤフレームでプロットしたもの.

平衡状態では，自由エネルギーが最小値を取り，これを与えるパラメーター (磁化) が実際に現れるとする. 1 スピンあたりの自由エネルギーを \mathcal{F} として，これが，磁化 M の関数 $\mathcal{F}(M)$ としてどのように表されるかが問題である.

対称性を考慮するため，式 (5.1) のハミルトニアンで，対称性を低下させている磁場をゼロとする. この状態で，すべてのサイトのスピンを反転させる一種の対称操作を行う.

$$\forall i \quad \mathbf{S}_i \rightarrow -\mathbf{S}_i.$$

この操作に対して， $\mathbf{B} = 0$ のハミルトニアン (5.1) は明らかに不変である. 従って， \mathcal{F} も不変である. 一方，

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{S}_i \rangle \rightarrow \langle -\mathbf{S}_i \rangle = -\mathbf{M} \quad (5.12)$$

であり，パラメーター M は符号が反転する. 以上より，

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(-M), \quad (5.13)$$

すなわち， \mathcal{F} は M の偶関数である. M の小さなところで \mathcal{F} をべき展開すると，4 次の項まで取って，

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0 + aM^2 + bM^4 \quad (5.14)$$

とすることができる.

式 (5.14) で，有限 M に \mathcal{F} の安定点を持つために， $b > 0$ である. この時， $a \geq 0$ であれば，図 5.2(a) のように \mathcal{F} の安定点は常に $M = 0$ である. $a < 0$ の場合，図 5.2(b) のように M が有限の位置に $M = 0$ よりも自由エネルギーが下がって安定な点が生じる. 安定点を得るための方程式は，

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = 0 = 2aM + 4bM^3 = 2M(2bM^2 + a) \quad (5.15)$$

である. これは，式 (5.6) と同型，すなわち同じものを表しており，磁気状態方程式とも呼ばれる. 図 5.2 のように，(a) $a \geq 0$ では常磁性であり，(b) $a < 0$ で強磁性が現れる. a は $\mathcal{F}(M)$ を決めるパラメーターであり， M についての相転移点でゼロを通過する一方，特異な振舞いはしないはずである. 従って， a は転移に有効なパラメーターである，温度，圧力などの熱力学的パラメーターに対して，転移点周辺ではべき指数の最低次，1 次で変化する. このように， a が連続的に変化した場合に， $\mathcal{F}(M)$ が連続的に変化し，転移点 $a = 0$ で \mathcal{F} の安定点が $M = 0$ 以外に現れる様子を，図 5.2(c) に示した. 転移のパラメーターとして温度 T を考えると， a について「転移点でゼロを通過して T の 1 次」の表現として $a = k(T_C - T)/T_C$ とすると，式 (5.15) の有限解 M_0 は

$$M_0 = \sqrt{-\frac{a}{2b}} = \sqrt{\frac{k(T_C - T)}{2bT_C}} \quad (5.16)$$

と得られる.

以上の理論では， \mathcal{F} が転移点で連続であったから，強磁性転移として転移点で潜熱のない，2 次の相転移を考えていることになる.

5.2.2 自発的対称性の破れ

$T \leq T_C$ では、熱力学的な安定解は $\mathcal{F}(M_0)$ である。この状態では、 $\langle M \rangle = M_0$ あるいは $-M_0$ で、第1回の講義で見た、強磁性体の**自発磁化**が現れている*1。式(5.14)の展開を得た際には、 $\forall i: \mathbf{S}_i \rightarrow -\mathbf{S}_i$ という対称操作に対して、ハミルトニアン(5.1)が対称であることから、パラメーター M に対する自由エネルギーの対称性(5.13)を導いた。 $T < T_C$ では、 $M = 0$ は不安定解となり、安定解の $\pm M_0$ のどちらかが実現する。(5.13)によって、対称操作を行っても自由エネルギーは変化しないものの、 M が状態を規定するパラメーターとなったため、今度は対称操作に対して状態が変化する。このように、系(ハミルトニアン)の対称性は保たれたまま実現する状態の対称性が破れる現象を**自発的対称性の破れ**(spontaneous symmetry breaking)と呼ぶ。これは、南部陽一郎によって、超伝導のBCS理論(およびBogoliubov理論)と質量のない粒子が質量を獲得する機構とのアナロジーとして導入され[5, 6, 7]、広範囲の物理現象に適用され、現在でも研究が進められている、物理学の基本概念の一つである。南部自身の一般向け解説書を始め、多くの解説が書かれている[8, 9, 10, 11]。

自発磁化 M_0 が生じた状態は、スピンの揃った方向を向いて等方的であった系に、スピンの揃うことによって異方性が生じている、と見ることができ、対称性が破れている。一方、スピンの揃うことで秩序が発生している。このことから、 M_0 のように、転移点で現れて秩序を代表するパラメーターを**秩序パラメーター**(order parameter)という。

5.3 臨界指数

自発磁化 M_0 が生じた状態での T の関数としての \mathcal{F} は、

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}_0 + aM_0^2 + bM_0^4 = \mathcal{F}_0 - \frac{a^2}{4b} = \mathcal{F}_0 - \frac{k^2(T_C - T)^2}{4bT_C^2} \quad (5.17)$$

と書かれる。

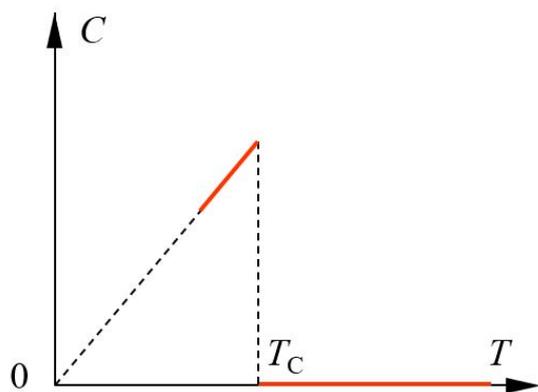
これより、比熱 C は、 $T \leq T_C$ で

$$C = -T \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} = \frac{k^2 T}{2bT_C^2} \quad (5.18)$$

である。一方、 $T \geq T_C$ では、 $M_0 = 0$ で、 $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}_0$ であるから、 $C = 0$ である。したがって、比熱には $T = T_C$ で

$$\Delta C = \frac{k^2}{2bT_C} \quad (5.19)$$

だけの「飛び」が生ずることになる。この様子を左図に模式的に描いている。



以上の磁場 $B = 0$ 状態に対して、有限磁場が印可された場合は、最も低次の近似ではハミルトニアン(5.1)で外部磁場の項を磁化 M に対して $-BM$ とすることが考えられる。すなわち、

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0 + aM^2 + bM^4 - BM \quad (5.20)$$

と1次の項を加える。すると、

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = 0 = 2aM + 4bM^3 - B \quad (5.21)$$

で、転移点直上 $T = T_C$ では $a = 0$ より $M^3 \propto B$ である。

*1 ただし、やはり講義で紹介したように、実験ではゼロ磁場でキュリー温度上から冷却していくと、マクロな自発磁化はそのままでは生じない。これは、磁性体内に磁区が形成され、磁束は内部の磁気回路を通して外部に漏れないようになっているからである。

以上見てきた、磁化 M 、帯磁率 χ 、比熱 C について、それぞれ、次のような形に書ける。

$$M \propto \begin{cases} B^{1/\delta} & (T = T_C), \\ (T_C - T)^\beta & (T < T_C), \end{cases} \quad (5.22a)$$

$$\chi \propto \begin{cases} (T - T_C)^{-\gamma} & (T > T_C), \\ (T_C - T)^{-\gamma'} & (T < T_C), \end{cases} \quad (5.22b)$$

$$C \propto \begin{cases} (T - T_C)^{-\alpha} & (T > T_C), \\ (T_C - T)^{-\alpha'} & (T < T_C). \end{cases} \quad (5.22c)$$

上の温度あるいは磁場のように、その変化によって系に相転移をもたらす有効な (relevant) パラメーターの臨界値からのずれを考え、転移点上で発散あるいはゼロを示すような量が「ずれ」に対してどう変化するかを示すべき指数を**臨界指数** (critical exponent) と呼ぶ。特に今考えている 2 次の相転移で有効な概念である。上記の $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ などの記号は特に磁性の相転移で習慣的に使用されているものである。ここで、(5.22c) の比熱については、「飛び」の異常があるが、 $T < T_C$ 、 $T_C < T$ においては、 $T - T_C$ に対して定数項が主要項であり、 $\alpha = \alpha' = 0$ である。

上記臨界指数は、一般に模型の対称性や近似によって変化する。一方、パラメーター等で変化するのではない。このことを臨界指数が**普遍性** (universality) を持つ、と表現する。更に、様々な臨界指数について、同じ値の組を持っているかどうかで、(近似も含む) 理論模型をクラス分けすることができる。このクラス (**普遍性クラス** (universality class)) 分けは、GL 理論の導入の際に見たように、対称性によって決まっていることも多いが、その他、空間次元や相互作用のレンジなど、一般性の高い性質によって決まっている。次に示すのは、平均場近似において得られた臨界指数の値である。

Critical exponent	α	β	γ	δ
Mean field approximation	0	1/2	1	3

次に、折角普遍性クラスの話までしたが、平均場近似しか見ていないので、他の理論模型についても少し見ておくことにしよう。

5.4 磁性体の理論模型

磁性体の理論模型は、統計物理学の格好の舞台である。以上では、磁性絶縁体の模型としてハイゼンベルク模型を考えていた。ハイゼンベルク模型では、スピン変数は 3 成分 $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ で考えていたが、これを 2 成分 $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y)$ としたものを **XY 模型**、1 成分の積の形にしたものを **イジング模型** (Ising model) と呼ぶ。ハイゼンベルク模型、XY 模型においては、スピン自由度が連続であるが、イジング模型では 2 値に離散化されている。

5.4.1 XY 模型

スピンの 2 次元面内にあるため、適当な統一基準による各サイト (i サイトとする) のスピンの角度 ϕ_i を割り振ると、サイト i 、サイト j にある 2 つのスピンのなす角度は $\phi_i - \phi_j$ である。従って、XY 模型のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (5.23)$$

と書くことができる。特に、2 次元 (連続) スピン系では、Mermin-Wagner の定理によりスピン系が長距離秩序を持つことはないが、2 次元 XY 模型においては、秩序パラメーターが指数関数ではなく距離のべきで減衰する準長距離秩序が生じる、Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移が生じる [12]。これは、低温相ではスピンの渦状構造がその巻き方でペア (渦対) を作って局在するのに対して、温度上昇と共に渦対密度が上昇し、渦対同士による遮蔽によって、最も遠距離の渦対の解離が生じることで起こる相転移である。2 次元の融解転移という捉え方もできる。

何らかの理由により、スピンの強い異方性を持ち、2次元的に閉じ込められているような場合、実際にこのような状況もあり得る可能性があるが、よりありふれたセットアップで(5.23)のハミルトニアンに近い状態が実現している可能性が高いのが、超伝導の Josephson 接合ネットワークである [13]。これは、島状超伝導体を2次元的に並べて Josephson 接合で結合したもので、リソグラフィで作ったり、グラニュー超伝導膜で自然に形成されたりする。各島状超伝導体(やはり i とする)の超伝導秩序パラメーターの「位相」*2を ϕ_i と書くと、Josephson エネルギーの和は(5.23)の形になる。また、上に述べたような2次元の渦は、超流動渦糸としてフィルムフロー効果で薄く伸びた超流動膜にも生じるため、このような系でも(XY 模型とはやや離れるが)同様なことが生じる可能性がある。

実際に、BKT 転移で予言されていた様々な異常の、これらの系での実験的確認が多く報告されている。

5.4.2 イジング模型

「アイジング」模型と発音する人も多いイジング模型 (Ising model) の名は、近接相互作用の場合にこの模型の解を示した Ernst Ising に由来する [14]。ハミルトニアンで、

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (5.24)$$

と表現される。ここで、 i, j などとしたのは、格子点サイトの指数で、 S_i は、サイト i の Ising スピンで、 ± 1 の値を取る。第2項では、 μB を簡単に h とした。

磁性体模型の代名詞とも言えるもので、モデルの簡潔さもさることながら、1次元の Ising の場合もそうであったが、2次元 Ising 模型は Onsager により外部磁場の無い場合の厳密解が求められ [15]、相転移が存在することが示され、様々な物理の探求のための基礎になっていることは大変大きなことである。

このような模型の臨界指数について、次の表にまとめた [16]。小数点を使って書かれたものは、モンテカルロ法によって計算機で求められた値である。

Model (Universality class)	α	β	γ	δ
2D Ising	0	1/8	7/4	15
3D Ising	0.115	0.324	1.239	4.82
3D XY	-0.01	0.34	1.32	4.9
3D Heisenberg	-0.11	0.36	1.39	4.9
Mean field approximation	0	1/2	1	3

5.5 反強磁性ハイゼンベルク模型

次に、Heisenberg 模型

$$\mathcal{H} = -2J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mu \sum_i \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_i \quad (5.1)$$

で、反強磁性な場合 $J < 0$ を考えよう。系を2次元正方格子とし、最近接の相互作用のみを考える。系が反強磁性の秩序状態にある場合、図 5.3 にあるように、2次元正方格子 Heisenberg 模型の古典基底状態は、最近接サイト同士が反平行スピンをもつ Néel 秩序状態と呼ばれる状態である。

全体の結晶格子を A, B 部分格子に分けて、それぞれの格子内ではスピンの揃った状態を考える。強磁性 Heisenberg 模型を扱った際は、等方空間に方向性を持たせるため、外部磁場を印可する方法を取った*3。反強磁性でも同様なことをするが、今度は図 5.3 右のように、サイトで向きが交代する磁場を用意する必要がある [17]。いずれにしても、

*2 これは、ゲージ不変でなく、オブザーバブルではないが、ハミルトニアンに現れる「位相差」はゲージ不変でオブザーバブルであるためこれを考えることが許される。

*3 秩序の出現の「種」を入れておかないと、系が不安定解を取り続ける。

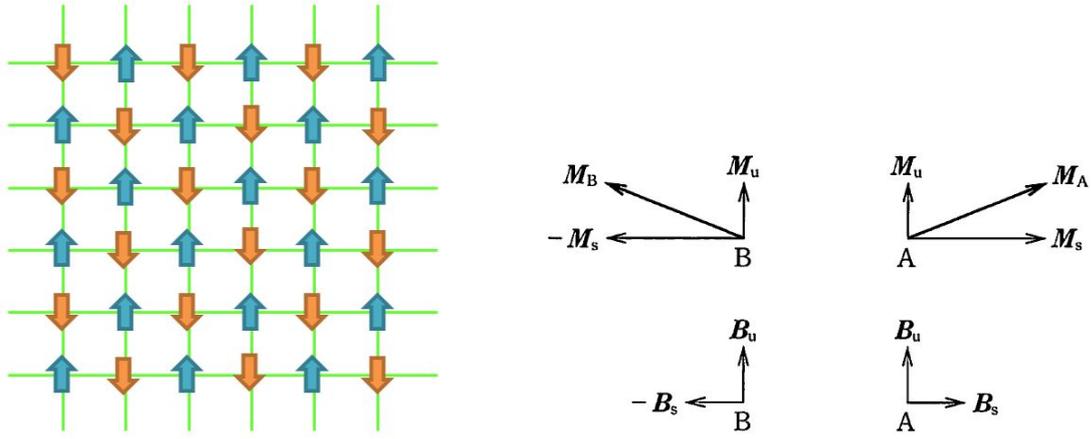


図 5.3 左：2次元正方格子の Néel 反強磁性秩序．右は反強磁性秩序付近にスピンを設置するための「種磁場」の模式図．[17] より．

これは秩序状態でゼロにしてしまう．スタート時点では，外部磁場に対して安定配置を取り，各サイトのモーメントは，図 5.3 右のように，外部磁場に対してほぼ垂直から若干外部磁場方向に傾いた状態である．

外部の一定磁場を B_u ，サイト交代磁場を $\pm B_s$ とし，それぞれの格子サイト磁場を

$$\left. \begin{aligned} B_A &= B_u + B_s \\ B_B &= B_u - B_s \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

と書いて，分子場近似の有効ハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(i) = -2J \sum_{\delta} \langle \mathbf{S}_{i+\delta} \rangle \cdot \mathbf{S}_i - \mu \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{S}_i \quad (i \in A) \quad (5.26a)$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(j) = -2J \sum_{\delta} \langle \mathbf{S}_{j+\delta} \rangle \cdot \mathbf{S}_j - \mu \mathbf{B}_B \cdot \mathbf{S}_j \quad (j \in B) \quad (5.26b)$$

とする．それぞれのサイトの磁気モーメントの平均値は

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \mu \langle \mathbf{S}_i \rangle = M_u + M_s \\ M_B &= \mu \langle \mathbf{S}_j \rangle = M_u - M_s \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

となる．ブリュアン関数をベクトルで，

$$\vec{B}_S(\mathbf{x}) = B_S(x) \frac{\mathbf{x}}{x} \quad (5.28)$$

のように定義し，無撞着方程式を次のように書く^{*4}．

$$M_u + M_s = \mu S \vec{B}_S \left\{ \frac{\mu S}{k_B T} \left[B_u + B_s + \frac{2\alpha_z J}{\mu^2} (M_u - M_s) \right] \right\}. \quad (5.29)$$

$T > T_N$ では， $\vec{B}_S(\mathbf{x}) \sim (S+1)\mathbf{x}/3S$ を用いて

$$M_u + M_s = \chi_0 \left[B_u + B_s + \frac{2\alpha_z J}{\mu^2} (M_u - M_s) \right] \quad (5.30)$$

と書ける． χ_0 の定義は式 (5.6) と同じである．

以上より，一様帯磁率 χ_u ，交代帯磁率 χ_s がそれぞれ

$$\chi_u = \lim_{B_u \rightarrow 0} \frac{M_u}{B_u} = \chi_0 \left(1 - \frac{2\alpha_z J}{\mu^2} \chi_0 \right)^{-1} \quad (5.31a)$$

$$\chi_s = \lim_{B_s \rightarrow 0} \frac{M_s}{B_s} = \chi_0 \left(1 + \frac{2\alpha_z J}{\mu^2} \chi_0 \right)^{-1} \quad (5.31b)$$

^{*4} 今回の場合は， $\alpha_z = 4$ ．

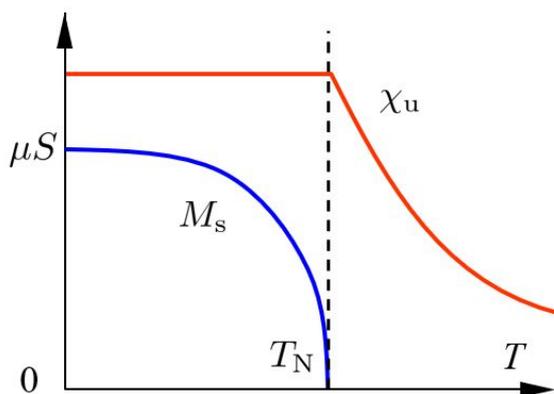


図 5.4 反強磁性ハイゼンベルク模型の分子場近似による帯磁率と内部交代磁化の温度依存性模式図。

のように求められる。 $J < 0$ であるから、 χ_u は発散しない。一方、 χ_s は、 **Néel 温度**

$$k_B T_N = \frac{2}{3} S(S+1) \alpha_z |J| \quad (5.32)$$

で発散する。従って、 $B_s \rightarrow 0$ に対して、 **交代自発磁化 M_s** が生じる。

自発 M_s の周りの展開より

$$M_u + M_s = \mu S \left[\vec{B}_s \left(\frac{\mu S}{k_B T} \frac{-2\alpha_z J}{\mu^2} M_s \right) + \frac{d}{dM_s} B_s \left(\frac{\mu S}{k_B T} \frac{-2\alpha_z J}{\mu^2} M_s \right) \left(-M_u - \frac{\mu^2}{2\alpha_z J} B_u \right) \right]. \quad (5.33)$$

右辺第 1 項より M_s についての自己無撞着方程式

$$M_s = \mu S B_s \left(\frac{\mu S}{k_B T} \frac{-2\alpha_z J}{\mu^2} M_s \right) \quad (5.34)$$

が得られる。両辺を M_s で微分すると、

$$1 = \mu S \frac{d}{dM_s} B_s \left(\frac{\mu S}{k_B T} \frac{-2\alpha_z J}{\mu^2} M_s \right)$$

であるから、式 (5.33) 右辺第 2 項より

$$M_u = -M_u - \frac{\mu^2}{2\alpha_z J} B_u \quad (5.35)$$

が得られ、 $M_u = -\mu^2 B_u / 4\alpha_z J$ より、

$$\chi_u = \lim_{B_u \rightarrow 0} \frac{M_u}{B_u} = -\frac{\mu^2}{-4\alpha_z J} \quad (5.36)$$

以上の状況を図 5.4 に示した。

参考文献

- [1] V.L. Ginzburg and L.D. Landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 20, p. 1064, 1950.
- [2] Vitaly L. Ginzburg. On superconductivity and superfluidity (what i have and have not managed to do), as well as on the 'physical minimum' at the beginning of the 21st century. *ChemPhysChem*, Vol. 5, No. 7, pp. 930–945, July 2004.
- [3] Shang-keng Ma. *Modern Theory Of Critical Phenomena (Advanced Books Classics)*. Routledge, 5 2018.
- [4] 西森秀稔. 相転移・臨界現象の統計物理学 新物理学シリーズ. 培風館, 11 2005.
- [5] Yoichiro Nambu. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, Vol. 117, pp. 648–663, Feb 1960.

- [6] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, Vol. 122, pp. 345–358, Apr 1961.
- [7] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Phys. Rev.*, Vol. 124, pp. 246–254, Oct 1961.
- [8] 南部陽一郎. クォーク第2版: 素粒子物理はどこまで進んできたか (ブルーバックス). 講談社, 2 1998.
- [9] 南部陽一郎. 素粒子論研究 (わが研究の思い出) (〈特集〉日本物理学会のあゆみ). 日本物理学会誌, Vol. 32, No. 10, pp. 773–778, 1977.
- [10] Y. Nambu. *Broken Symmetry: Selected Papers of Y. Nambu (World Scientific Series in 20th Century Physics)*. World Scientific Pub Co Inc, 10 1995.
- [11] PHILIP W. ANDERSON. *BASIC NOTIONS OF CONDENSED MATTER PHYSIC*. TAYLOR & FRANCIS, 2 2019.
- [12] V N Ryzhov, E E Tareyeva, Yu D Fomin, and E N Tsiok. Berezinskii – kosterlitz – thouless transition and two-dimensional melting. *Physics-Uspeski*, Vol. 60, No. 9, pp. 857–885, September 2017.
- [13] Shingo Katsumoto. Single-electron tunneling and phase transitions in granular films. *Journal of Low Temperature Physics*, Vol. 98, No. 5-6, pp. 287–349, March 1995.
- [14] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Vol. 31, No. 1, pp. 253–258, February 1925.
- [15] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, Vol. 65, pp. 117–149, Feb 1944.
- [16] H W J Blöte, E Luijten, and J R Heringa. Ising universality in three dimensions: a monte carlo study. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 28, No. 22, pp. 6289–6313, nov 1995.
- [17] 上田和夫. 磁性入門 (物性科学入門シリーズ). 裳華房, 単行本, 9 2011.