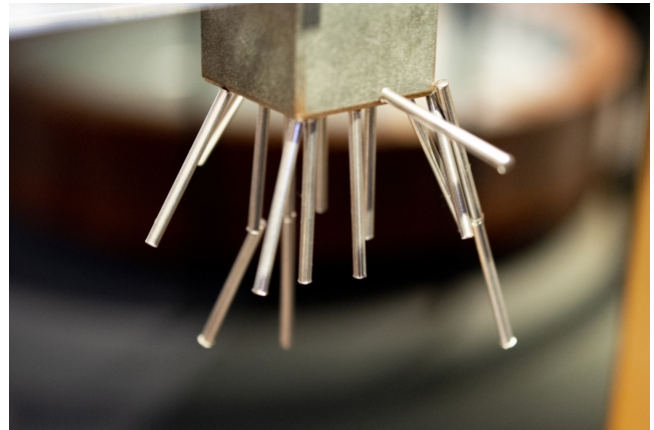


第1章

磁性を考える上での基本事項



磁場は電場あるいは重力場と並んで、遠隔力を生み出す「場」として身近なものである。物質は磁場に対して何らかの応答をし、また磁場の源ともなる。このような物質の性質を「磁性」と呼ぶ。我々にとって最も顕著な「磁性」は、永久磁石に代表される自発磁化ではないだろうか。一方、あらゆる物質は一定の磁性を持っている。我々は何を持って磁性と呼ぶのか、それは何によって来たるものなのか？半年間、この問題を考え、十分な答えが得られるわけではないが、とにかく考える糸口程度はつかめるように講義していきたい。

本章では磁性を考えていく上で最も基本になる事項にざっと目を通してみる。なお、講義においては、時間の都合上これらをスキップする可能性がある。

1.1 真空中および物質が存在する場合の電磁場

基礎的な電磁気学は、学部で学んでいると考え、略す。まず、物質の磁気的な性質について、現象論的に考える。

1.1.1 Maxwell 方程式と磁気モーメント

古典論においては、真空中の電磁場は次の Maxwell 方程式で記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (1.1d)$$

単位系は MKSA (SI) を使用する (付録 1A). 記号の説明は不要であろうが, 念のため, \mathbf{B} は磁束密度 (magnetic flux) で, SI では [T](テスラ) を単位とする. あるいは, 磁束数 [Wb](ウェーバー) を考え, 単位面積 [m²] あたりの磁束数という事で, [T] は [Wb/m²] と同じである. 磁場 (magnetic field) 強度の単位は [A/m] というようになっていて, これで測られる量の記号には一般に \mathbf{H} が使用される. 真空中では $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ と, 真空の透磁率 μ_0 (permeability of vacuum) を係数とする比例関係にある. μ_0 は MKSA 単位系では物理次元のある量であり, 従ってうるさく言えば \mathbf{B} と \mathbf{H} は物理的に異なる量ということになる. しかし, 係数である真空透磁率は, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] というユニバーサルなスカラー量であることから, \mathbf{H} ばかりでなく \mathbf{B} も慣用的に「磁場」という呼称で呼ばれることが多い.

式 (1.1c) において, \mathbf{E} と \mathbf{B} は, 係数を別としても対称な形にはなっていない. その原因は, (1.1a) 右辺の ρ (電荷密度), および (1.1d) 右辺の \mathbf{j} (電流密度) で, これらは, 電荷が単極子 (モノポール, monopole) として存在し得ることに由来している. 磁気単極子 (magnetic monopole) の存在は完全に否定されてはいないが, 確かな発見の報告は一件もなく, 現状は式 (1.1) のように, 存在しないものとして扱われている. 従って, 式 (1.1) の範囲では, 磁場を生み出すものは式 (1.1d) のように, 電場の時間変化と電流である. ところが, 後述するように電子や原子核はスピン角運動量を持ち, それによる磁気双極子 (magnetic dipole) モーメントを持っている. このため, これらの粒子の周辺には双極子磁場が生じている.

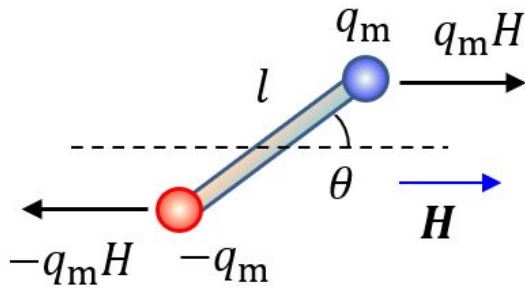


図 1.1 磁場中に置かれた磁気双極子にかかる偶力モーメント.

この双極子磁場は, 円電流を縮めた極限として考えることができる (1B.2). 一方, 電気双極子との対応から, 仮想的な磁荷を考え, 正負の同じ大きさの磁荷の距離を縮めた (磁荷 \times 距離一定条件) 極限として考えることもできる. 話が前後するが, そこで, 磁気モーメントを次のように定義しよう. 「磁荷」の MKSA 単位は, 電荷の単位 ([C]) = 電束の単位 (ガウスの法則による) であることにならない, 磁束の単位, [Wb] を使用する. (極限を取る前の) 双極子状態を考え, 正負の磁荷を $\pm q_m$, その距離を l とし, 一様な磁場 H の中に角度 θ で置かれているとする (図 1.1). 磁荷には磁場から力 $q_m H$ が働くので, 双極子には偶力モーメント

$$L = -q_m l H \sin \theta = -(q_m l / \mu_0) B \sin \theta \quad (1.2)$$

が生じる. 積 $q_m l$ のみに依存する量は, 極限を取っても変わらない. そこで,

$$\mu \equiv q_m l / \mu_0 \quad (1.3)$$

のように書き, μ を磁気モーメント (magnetic moment) と呼ぶ.

式 (1.2) の偶力モーメントは, 磁気双極子を $\theta = 0$ の方向に回転するように働くので, 次のような静磁ポテンシャル ϕ_m を導入して表すことができる.

$$\phi_m = -\mu B \cos \theta. \quad (1.4)$$

以上を一般化してベクトル表記を使用すると,

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \quad \phi_m = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (1.5)$$

となる.

1.1.2 双極子相互作用

座標原点に置いた磁気モーメントの向きを z 軸方向に取り, (r, θ, φ) の球座標 (図 1.2(a)) で考える. 素となった磁荷の作る放射状の磁場を考えるとわかるように, φ 方向には磁場は生じない. 残る (r, θ) 方向の双極子磁束密度

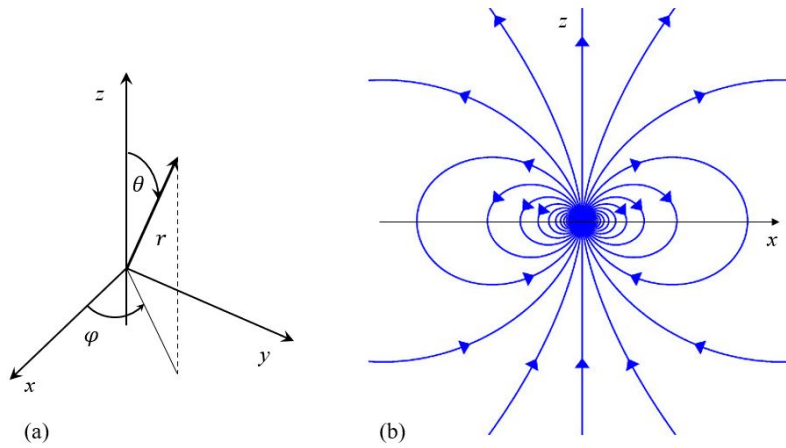


図 1.2 (a) 極座標 (r, θ, φ) の模式図. (b) 磁気双極子の磁力線模式図.

(B_r, B_θ) は、良く知られているように、

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{4\pi\mu_0} \frac{2\cos\theta}{r^3}, \\ B_\theta &= \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{4\pi\mu_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

と、距離の 3 乗に反比例する。導出は、付録 1B1 を見よ。式 (1.6) の表す磁場ベクトルの接線をつないだ磁力線に相当するものを描くと、図 1.2(b) のようになる*1。

次に、このような 2 つの磁気モーメント、 $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2$ を考える。図 1.3 のように、 $\boldsymbol{\mu}_1$ から $\boldsymbol{\mu}_2$ へ向かうベクトルを \boldsymbol{r} とする。 $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2$ は互いの作る式 (1.6) の磁場の中で式 (1.4) のようなポテンシャルを形成する。2 つの磁気モーメントが全体として形成するポテンシャルは、

$$U = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3} \left\{ \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \boldsymbol{r}) \right\} \quad (1.7)$$

である。導出は、付録 1B2 に示した。式 (1.7) によって表されるモーメント間の相互作用を、**双極子-双極子相互作用** (dipole-dipole interaction) と呼ぶ。式 (1.7) のポテンシャルで、 $|r|$ については分母分子でキャンセルされるため、係数の大きな第 2 項を (符号がマイナスであるため) 最大にするモーメント配置は、図 1.3(a) のようになり、これが安定配置である。図 1.3(b) の配置は不安定となる。このような、古典的双極子-双極子相互作用は、後述する量子力学的な交換相互作用に比べて一般にずっと小さいが、それでも現象によっては重要な役割を担うこともある。

複数の磁気モーメントについて、更に基本的な問題は、複数の磁気モーメントを遠くから見た時にどのように見えるか、である。問題がもし、双極子の場合と同様に磁気モーメント間の距離を近づけると同時にモーメントの大きさを大きくする、というものであれば、これは**多極子** (multipole) の問題となる。しかし、単に遠くから見る、というだけであれば、正負のチャージをまとめて遠方から見た際に、チャージ全体を加算して点チャージとして扱って良い

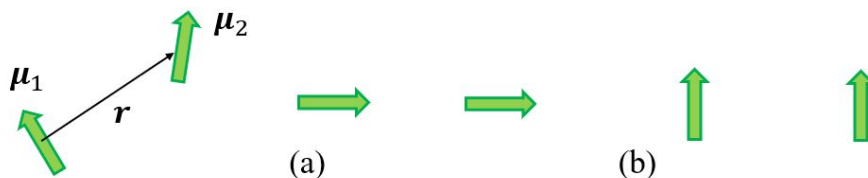


図 1.3 2 つの磁気双極子の古典的相互作用. (a) 安定配置 (b) 不安定配置

*1 この図では、磁力線密度が磁場に比例することまでは考慮されていない。

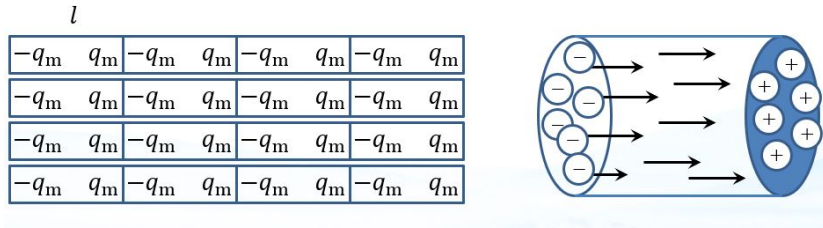


図 1.4 長さ l の小さな磁石の集合体としての物質の磁化のモデル.

のと同じく, Maxwell 方程式の線形性, 磁場の加算性から, 問題となる磁気モーメントを $\{\mu_0, \mu_1, \dots\}$ とすると, 遠方から見てベクトル和の

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \quad (1.8)$$

が存在していると見ることができる.

1.1.3 物質の磁化

物質を磁場の中に置くと, 一般に磁気モーメントが誘起される. このことを, 物質が磁化された, という. 物質の誘起された磁気モーメント密度が一様である場合, 単位体積当たりの磁気モーメントを**磁化** (magnetization) あるいは**磁気分極** (magnetic polarization) と呼ぶ. 今, 磁化を \boldsymbol{M} と書き, 定義 (1.3) より, 物質内に誘起された磁気モーメントを大きさの揃った離散的なモーメント $\boldsymbol{\mu} = q_m \boldsymbol{l} / \mu_0$ が単位体積当たり N 個ある, という形で表したとすると,

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\text{unitvol.}} \boldsymbol{\mu} = N q_m \boldsymbol{l} / \mu_0 \equiv \rho \boldsymbol{l} / \mu_0 \quad (1.9)$$

と書ける. $\rho \equiv N q_m$ は磁荷密度のような量であるが, 図 1.4 のように, 長さ $l = |\boldsymbol{l}|$ の小さな棒磁石が一方向に並んで物質を形成しているという簡単なモデルを考えると, 隣接するモーメントの磁荷は (距離がゼロであるため) 相殺して, 物質内部には有効磁荷は存在せず, 物質の端に磁荷が現れることになる.

今, 端面を磁気分極に対して垂直にとると, 端面に現れる磁荷の面密度は, この小さな棒磁石がつながった「棒」の面密度 s に q_m を乗じたものである. 単位面積で厚さ l のスラブを考えると, 中に含まれる磁気モーメント数は厚さ方向には 1 であるから, ちょうど s となるが, 一方定義より Nl でもあるから, $s = Nl$ である. 従って端面の磁荷の面密度 σ は

$$\sigma = q_m s = q_m Nl = \mu_0 |\boldsymbol{M}| \quad (1.10)$$

となり, 磁気分極は端面の磁荷の面密度に等しい.

以上で考えた, 物質に誘起される (外部磁場なしでも生じる自発磁化も存在する) 磁気モーメント, すなわち磁化によって物質周辺に磁場が発生する. これは, 遠方では (1.8) により, 物質端面の面積を S , 長さを L として, $LS|\boldsymbol{I}| = V|\boldsymbol{M}|$ の磁気モーメントが存在する場合の磁場である. 従って, 物質外部で物質由来の磁場を測定することで \boldsymbol{M} を測定できる. 磁性, すなわち物質の磁氣的性質の中でも最初に取り上げるべきは, (以上の素朴なモデルがどこまで使えるかは別として) このように**物質にどのような磁気モーメントが誘起されるか**, という問題である.

1.1.4 物質存在下での電磁場

磁気モーメントが円電流で表されたことから, 物質中の磁気モーメントの効果も電流として表すことができる. 図 1.5 のように, 物質中の座標を \boldsymbol{r}' にとり, 各モーメントの効果を合計して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{mat}} dv' \frac{\boldsymbol{M}' \times \boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{mat}} dv' \left(\boldsymbol{M}' \times \nabla' \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{mat}} dv' \left(\boldsymbol{M}' \times \nabla' \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

のように書くことができる。ここで、体積積分は物質の内部についてとり、 M' などは、図のように、物質内部の座標 (x', y', z') で表されていることを示す。(1.11)は更に部分積分を行うことで、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{mat}} dv' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}'}{r} \quad (1.12)$$

と書けるので、

$$\mathbf{j}_M \equiv \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.13)$$

とすると、 $\nabla \cdot \mathbf{j}_M = 0$ であるから、 \mathbf{j}_M は電流の一種と見ることができる。

この磁気モーメントを代表する「等価電流」に、実際の電荷の流れである真電流 \mathbf{j} も加えて、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \frac{\mathbf{j}' + \mathbf{j}'_M}{r} \quad (1.14)$$

と表せる。そこで、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \frac{(\mathbf{j}' + \mathbf{j}'_M) \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.15)$$

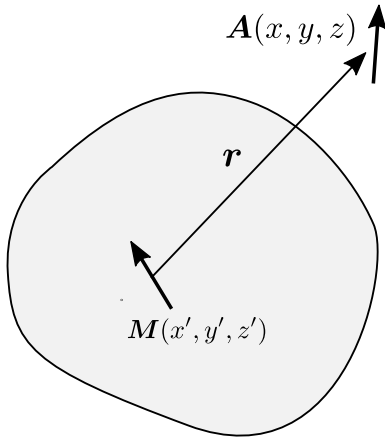
とすると、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_M) = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\nabla \times \mathbf{M} \quad (1.16)$$

という関係が得られる。ここで、

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} \quad (1.17)$$

図 1.5 物質中の磁気モーメントが形成するベクトルポテンシャルと置く、



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.18)$$

となって、 \mathbf{H} は磁気モーメント等価電流にはよらない形になっている。

改めて、物質が存在する場合の電磁場を考える。電束密度 \mathbf{D} 、また磁束密度 \mathbf{B} は、電気分極を \mathbf{P} として、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.19b)$$

と書くことができる。電荷の場合は、分極電荷 ρ_p 以外に真電荷 ρ_t が存在し、 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ であるから、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_t \quad (1.20)$$

と、分極電荷の効果を \mathbf{D} に取り込んだことになっている。更に、 $\nabla \times \mathbf{H}$ を \mathbf{D} を使って表すと

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.21)$$

となり、(1.1d)と同型の式になって、磁化の効果が現れない。

1.1.5 M(B)-H 曲線

以上、磁場 \mathbf{H} に対する物質の応答は磁化 \mathbf{M} として現れる。 \mathbf{M} が \mathbf{H} に比例する場合、

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} \quad (1.22)$$

と書き、比例係数 χ を帯磁率 (magnetic susceptibility) という。

$$\mathbf{B} = (\chi + \mu_0)\mathbf{H} \equiv \mu\mathbf{H} \quad (1.23)$$

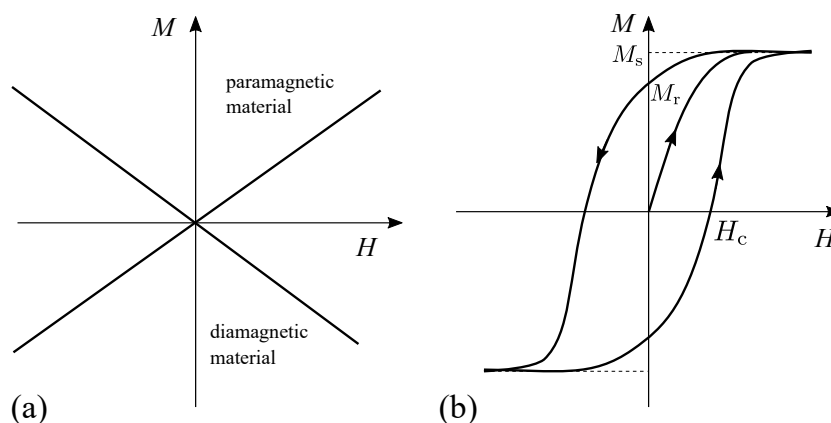


図 1.6 (a) 常磁性体, 反磁性体の MH 曲線を模式的に描いたもの. (b) 強磁性体の MH 曲線を模式的に描いたもの. H_c : 保持力 (coercive force), M_r : 残留磁化 (remanent magnetization), M_s : 飽和磁化 (saturation magnetization).

と書いて, $\mu \equiv \chi + \mu_0$ を透磁率 (magnetic permeability) という. $\bar{\mu} \equiv \mu/\mu_0 = \bar{\chi} + 1 = \chi/\mu_0 + 1$ を比透磁率という.

このように線形応答する物質の内, $\chi > 0$ であるようなものを常磁性体 (paramagnetic material), $\chi < 0$ であるようなものを反磁性体 (diamagnetic material) と呼ぶ. 更に, 強磁性体 (ferromagnetic material) のように式 (1.22) の比例関係が成立しない物質も多数存在し, 磁性の応用-磁気工学分野-においてはこれらは極めて重要である. こういう物質については, 磁場 H に対して磁化 M がどのように振舞うかを図示する, **M-H 曲線** で磁化の様子を表すことが多い. 図 1.6 はその模式図であり, 式 (1.22) の比例関係が成立する場合は (a) のように直線的な応答となる. 一方, (b) は強磁性体の例であり, H を上下に循環させると比例関係が成立しないばかりでなく, 磁場の上行下降で磁化が異なる値を取る, **履歴現象, ヒステリシス (hysteresis)** と呼ばれる現象が生じる. M-H 曲線ではなく, B-H 曲線を使用する場合もあるが, 等価である.

1.2 磁化測定

ここで, 実験でどのように磁化を測定するか, 磁性の内容理解で忙しくなってしまう前に少し紹介しておく. 更に, 測定上重要な反磁場の問題にも触れる.

1.2.1 磁化測定法

代表的な方法を紹介しておこう. 磁化測定には, (a) 磁化が周辺に作り出す磁場を測定する, (b) 磁化の変化を電磁誘導により電圧として測定する, の 2 種類がメジャーである. (a) の例として, 振動試料型磁力計 (vibrating sample magnetometer, VSM) や, SQUID (superconducting quantum interference device) 磁力計, (b) の例として, ピックアップコイル測定などがある.

(a1) **振動試料型磁力計**: VSM の測定原理模式図を, 図 1.7(a) に示した. 磁化を持つ物質を空間的に振動させると, 磁化によって生じる磁場は空間的に一様ではないので, 空間中の固定点で見ると時間に対して振動している. 試料近傍の空間固定点に検出コイルを配置すると, この磁場振動による電磁誘導が生じて交流電圧が生じる. VSM はこれを検出することで磁化を測定する.

実際に使用されている VSM では, 図でもごく簡単に書いてあるように, 逆向きと同じ数巻いた複数の検出コイルの中を, 小さく振動している試料をゆっくりと動かし, 反対向きに出る信号を利用してオフセットを取り除くようにしている.

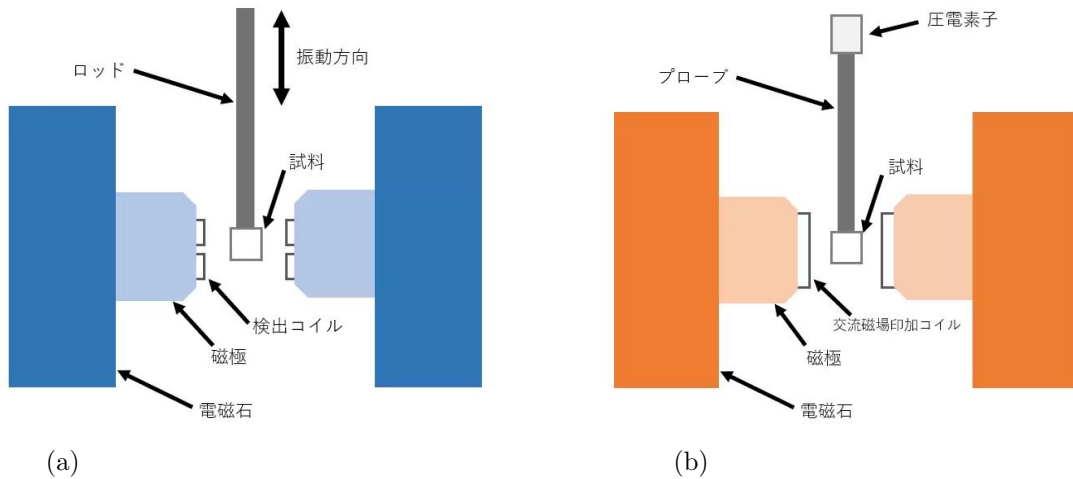


図 1.7 (a) VSM の測定原理模式図. (b) AGM の測定原理模式図. 東陽テクニカ サイト <https://www.toyo.co.jp/material/casestudy/detail/id=7003> より

(a2) **交代勾配型磁力計**: Alternating-gradient magnetometer (AGM) [1] は、磁気モーメントが磁場勾配中で力を受けることを利用し、図 1.7(b) のように、磁場勾配を付けるコイルに交流を流して勾配を振動させ、試料を支えるジグにかかる力の変化を検出する。力の検出は、原子間力顕微鏡 (AFM) などでお馴染みになった、レーザーとカンチレバーを用いる方法などによって極めて高感度になったため (図では piezo 素子を使用)、非常に高い感度が得られるようになった。

(a3) **SQUID 磁力計**: 超伝導体でできたリングは、これを貫く磁束を、量子磁束 $\Phi_0 \equiv h/2e \approx 2.07 \times 10^{-15}$ Wb 単位で量子化する。超伝導量子干渉素子 (superconducting quantum interference device, SQUID) は、リングの一部 (dc-SQUID の場合は 2 か所) を Josephson 接合で結合を弱くしたもので、超伝導臨界電流 J_c を測定すると、図 1.8(a) に模式的に示したように、 Φ_0 周期で大きく振動する。 Φ_0 という単位も極めて小さいが、SQUID の出力は、図 1.8(a) のように非線形であるため、 Φ_0 よりも何桁も小さな分解能で磁束を測定できる。

SQUID 自身は弱磁場中に置いておく必要があるため、実際の測定では、図 1.8(b) のように超伝導閉ループを用意し、一端に付けたコイルと SQUID を磁気結合する。試料は VSM などと同様、逆向きに巻いた超伝導コイル (図では $-+ + -$ の巻き方) 中を移動させ、逆向き信号でオフセットを取り除き、線形にフィットすることで磁化を得る。試料をできるだけ帯磁率が小さく一様なもので保持することが重要である。試料は、ピックアップコイルの超伝導が壊れない磁場まで測定することができる。SQUID は非常に高感度であるため、環境電磁場の測定や、脳から漏れ出

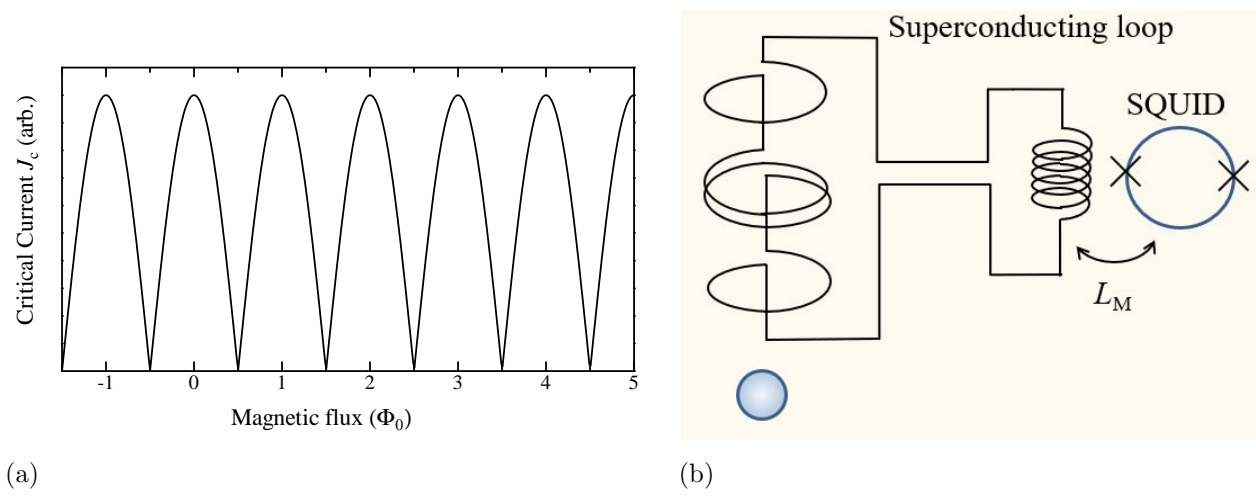


図 1.8 (a) SQUID 臨界電流の磁束応答模式図. (b) SQUID 磁力計 (帯磁率計) の超伝導回路図.

る微量の磁場測定などにも使用される (脳磁計).

(a4) **NV センター磁気計**: ダイヤモンド中の窒素不純物 (N) と格子欠陥 (vacancy, V) の複合欠陥は、バンドギャップ中に光吸収レベル等を持っており、マイクロ波を用いた電子スピン共鳴と光を用いた測定法を組み合わせることで、欠陥の非常に近傍の磁場を計測することができる。スピンを回転させるパルスの組み合わせなどによって SN 比を大きく高めることができ、用途によっては SQUID を置換するほどの感度を有するに至っている。

(b1) **ピックアップコイル**: コイル内部の透磁率によりコイルの応答が変化することを用いる。被測定物質にコイルを巻き、外部より交流磁場を印可すると、コイルには磁束変化量に依存する誘導電圧が生じる。その積分から磁束変化が測定でき、そこから帯磁率が得られる。

1.2.2 反磁場の影響

磁化測定の際に注意すべきこととして、反磁場の影響がある。これは、特に強磁性体の磁化などを測定する際に、形状依存性などとして現れる。磁荷のモデルで考えると、有限の大きさを持つ磁性体を磁場の中に入れて磁化するとき、試料両端に磁荷 (磁極) が現れ、これが試料内部に外部磁場と逆向きの磁場が生じる。これが、**反磁場** (demagnetizing field) である (図 1.9(a)). 反磁場 H_d は、磁化 M に比例し、

$$H_d = N \frac{M}{\mu_0} \quad (1.24)$$

と書いて、 N を**反磁場係数** (demagnetizing factor) と呼ぶ。反磁場係数は試料の形状に依存し、針状の細長い試料であればほぼ 0 になり、太くて短い試料の場合は大きくなる。

最も簡単な、図 1.9(b) の板状試料について見ると、磁化 M に対して、表面の磁荷密度は $\pm M$ である。対称性から磁力線は面垂直方向となる。板の表裏両方を含む円柱に対して Gauss の法則を適用すると、円柱内の磁荷の合計はゼロなので、外部に磁束は出てこない。この状態で、図のように、一方の面を囲む単位面積底面の円柱に Gauss の法則を適用すると、

$$\int_{\text{surface}} H_n ds = H_d = \frac{M}{\mu_0}$$

より反磁場係数 $N = 1$ となる。この他、様々な形状に対して反磁場係数が計算されている。

大きな反磁場が存在すると、例えば、図 1.6(b) のようなヒステリシス M-H 曲線が反磁場により大きくシフトする。[2] に出ている例を紹介すると、パーマロイ (Fe と Ni の合金, Py と略記) は保磁力が 2 A/m ($\approx 0.025 \text{ Oe}$) と極めて小さく、通常は非常に小さな磁場で飽和まで磁化してしまう。しかし、Py で球を作ったとすると、Py の飽和磁化は $9.23 \times 10^5 \text{ A/m}$ 程度であるから、球の反磁場係数 $1/3$ を用いると、反磁場は $3.08 \times 10^5 \text{ A/m}$ ($=3860 \text{ Oe}$) にな

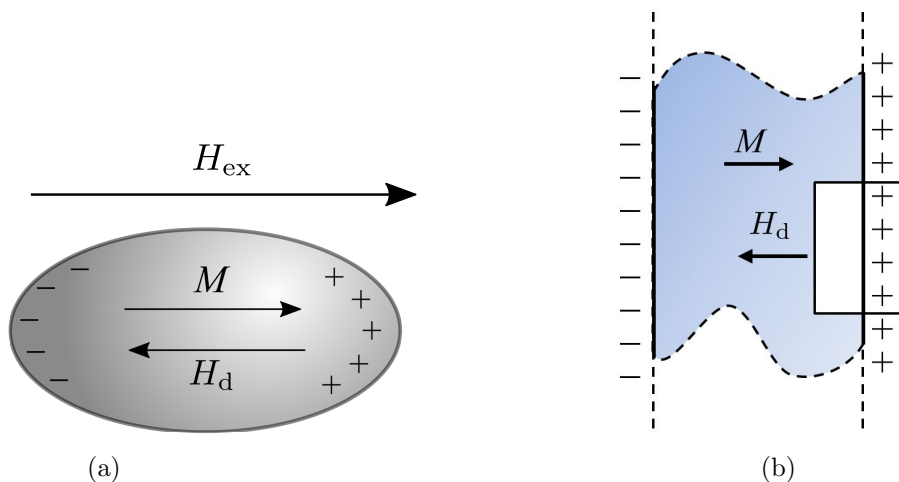


図 1.9 (a) 反磁場の概念図. (b) 板状試料の反磁場係数の計算.

る。すなわち、反磁場がない場合の10万倍ほどの磁場を印可しないと飽和磁化を得ることはできない。通常、M-H曲線として科学論文等にデータ提出する場合には、反磁場補正を行うか、「補正していない」旨の記述が必要になる。

1.3 古典磁性

磁性の物理的な中身の議論に進もう。磁性は、無論、まだ未知の部分が極めて多いものの、量子力学によって今日 of 理解が得られたので古典論では初歩的な理解も困難であった。この節では、そのことを見ておこう。ここで、「古典論」というのは、物質中には電荷 $-e$ 、質量 m の古典的粒子である電子の集団が存在し、これが、物質内部の等価電流 (1.13) を生じている、とするものである。

1.3.1 常磁性モーメントの古典的取扱い

古典力学・統計で磁性を扱うやり方を突き詰める前に、物質中にすでに向きを変える自由度を持つ磁気モーメントが存在する、と仮定して考えてみる。物質は原子から構成されており、原子核周辺の電子が軌道運動により磁気モーメントを元々持っている、というモデルを考えることになる。

互いに独立な磁気モーメント μ を持つ分子集団が、磁束密度 \mathbf{B} の z 軸方向磁場中にあるとする。モーメントの磁気エネルギーは、 $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta$ である。古典統計を考え、モーメント集団の z 方向成分の平均は、立体角 Ω での積分を用いて

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &= \int \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) \mu_z d\Omega / \int \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d\Omega \\ &= \int \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \mu \cos \theta d\Omega / \int \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) d\Omega \\ &= k_B T \frac{\partial}{\partial B} \log \left[2\pi \int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta \right] \\ &= \mu \left[\coth\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{\mu B} \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

と得られる。これより、 $\mu B \ll k_B T$ という高温近似を行うと、

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{B} \sim \frac{\mu^2}{3k_B T}. \quad (1.26)$$

これは、帯磁率が温度に逆比例するキュリー則 (Curie law) を示している。

1.3.2 反磁性の古典論

xy 面内で、半径 r の円に沿った電子を考える。円を Γ 、面積を S とし、Maxwell 方程式 (1.1b) の積分形

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.27)$$

を考える。これより、磁束密度 B を変化させると、誘導起電力

$$2\pi r E = -\frac{\partial}{\partial t} (B\pi r^2) \quad \therefore E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (1.28)$$

が生じる。電子は接線方向に $-eE$ で加速されるので、角運動量 L は

$$\frac{dL}{dt} = r \times (-eE) = e \frac{r^2}{2} \frac{dB}{dt} \quad (1.29)$$

と時間変化し, $0 \rightarrow B$ で生じる角運動量は $L = e \frac{r^2}{2} B$ である. 円上を走る電子の速さ v も 0 から増加したとすると, $v = L/mr$ である. 1B.2 のように, この円電流の磁気モーメントは, 円の面積 \times 電流であるから,

$$\mu = SJ = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \pi r^2 \frac{L}{mr} \frac{e}{\pi r} = \frac{e}{2m} e \frac{r^2}{2} B \quad (1.30)$$

となる. r を原子核-電子の距離として, 平均 $\langle x^2 + y^2 \rangle_{\text{av}}$ で置き換えると,

$$\mu = -\frac{e^2}{4m} \langle x^2 + y^2 \rangle_{\text{av}} B. \quad (1.31)$$

1.3.3 古典磁性の破綻

以上, 古典力学でも一見もっともらしそうな結果が得られた. しかし, 以下, 簡単な議論により, これらは実は破綻していることを示す. 電磁場がない場合の一粒子ハミルトニアン, $\mathcal{H} = \mathbf{p}^2/2m$ に対して, エネルギー \mathcal{E} , 運動量 \mathbf{p} を

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + e\phi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad (1.32)$$

とすることで, 電磁場を導入する. すなわち,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi \quad (1.33)$$

とすれば良い. このことは, これを使って正準方程式を求めると,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

となり, Loretz 力を再現することから正当化される.

対称ゲージ $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$ を取る. (1.33) は次のように計算される.

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2. \quad (1.34)$$

これより, この電子の運動によって生じる磁気双極子モーメント μ_m は,

$$\mu_m = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{e}{2m} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{e^2}{4m} (\mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})) \quad (1.35)$$

と計算される. ここで, 右辺第1項は, 角運動量 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ に比例することからわかるように, 電子が運動によって持っていた磁気双極子モーメントであり, **常磁性項**と呼ばれる. 一方, 第2項は磁束密度 $|\mathbf{B}|$ に比例しており, これは, 磁場がゼロから増加するにつれ, 誘導電場によって電子が加速され渦電流的な運動を行って磁場を打ち消そうとする働きによるものであることを示している. これは, **反磁性項**と呼ばれる.

N 個の電子系を考えると, ハミルトニアンは, 電子間相互作用を V と書いて,

$$\mathcal{H}_N = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p}_n + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_n))^2 - e\phi(\mathbf{r}_n) \right] + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.36)$$

温度 T での分配関数 Z を考えると,

$$Z = \prod_{n=1}^N \int \frac{d\mathbf{r}_n d\mathbf{p}_n}{h^3} e^{-\mathcal{H}/k_B T} \quad (1.37)$$

となる. 古典であるが, 古典統計でも状態数概念が必要なため, プランク定数 h が現れている.

ここで, $\boldsymbol{\pi}_n = \mathbf{p}_n + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と書くと,

$$Z = \prod_{n=1}^N \int \frac{d\mathbf{r}_n d\boldsymbol{\pi}_n}{h^3} e^{-\mathcal{H}'/k_B T}, \quad (1.38)$$

$$\mathcal{H}' = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\boldsymbol{\pi}_n^2}{2m} - e\phi(\mathbf{r}_n) \right] + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

となり、 \mathbf{A} が消えてしまっている。これより、磁気モーメントの統計平均を求めると、

$$\langle \mu_m \rangle = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{Nk_B T} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mathbf{B}} = \langle \mu_{\text{para}} \rangle + \langle \mu_{\text{dia}} \rangle = 0 \quad (1.39)$$

すなわち、古典電子描像に基づく古典統計の範囲では、常磁性項と反磁性項は相殺し、この系には磁性は現れないことになる。このことは、**Bohr-van Leeuwen の定理**と呼ばれる。

1.4 電子のスピンと磁気モーメント

量子論で磁性が生じる要因はいくつか存在するが、その1つが、量子論では電子がスピンを有し、スピン磁気モーメントを持っている、ということである。なぜ、電子という点電荷がスピンという内部構造を持ち、磁気モーメントを持つのか、という問いは、相対論的量子力学により明快に答えられる。これは、すでに学部において学んできているはずであるが、どういうことだったのか、そのロジックをざっと復習しておこう [3]。

1.4.1 Dirac 方程式

波動方程式形式の量子力学を考える。Schrödinger 方程式は非相対論的近似であり、Lorentz 変換に対して不変な形式を見つける必要がある。(1次元)Schrödinger 方程式は、Newton 力学のエネルギー-運動量関係 $E = p^2/2m$ において、

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.40)$$

という置換を施すことで得られる。更に、波動力学で用いられる波動関数は、確率振幅という意味を持つべきもので、時間について1階の微分方程式である必要がある [4]。

まず、相対論でのエネルギー-運動量関係式は、

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (1.41)$$

であった。これに置換 (1.40) を直接施すと、Klein-Gordon 方程式が得られるが、これは時間について2階であり、波動方程式条件を満たさない。結局、時間について1階で、かつ時間空間についての微分の次数が同じであるとするなら、空間微分も1階でなければならない。そこで、

$$E = \sum_{k=1,2,3} \alpha_k p_k c + \beta mc^2 \quad (1.42)$$

と書き、左辺を2乗して (1.41) が出てくるようにすることを考える。このためには、

$$\begin{cases} \alpha_k^2 = 1, & \beta^2 = 1, \end{cases} \quad (1.43a)$$

$$\begin{cases} \alpha_k \alpha_j + \alpha_j \alpha_k = 0 \quad (k \neq j), \end{cases} \quad (1.43b)$$

$$\begin{cases} \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 \end{cases} \quad (1.43c)$$

が条件である。これを満たすために、 α_k, β が行列であるとする、その次数は最低 4×4 でなければならない。これに応じて、波動関数は4成分を持つことになる。4成分波動関数 $\psi = {}^t(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ (t は転置) に対する方程式を書くと、次のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-i\hbar c \sum_{k=x,y,z} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \beta mc^2 \right] \psi \quad (1.44a)$$

$$\equiv \mathcal{H}_D \psi, \quad \mathcal{H}_D = c\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + mc^2 \beta. \quad (1.44b)$$

α_k, β の具体的な表現を求めるため、次の **Pauli 行列** を導入する。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

これらの行列の間には、次の関係が成立する。

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i\sigma_k, \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I. \quad (1.46)$$

(i, j, k) は (x, y, z) をサイクリックに入れ替える。以上より、次の具体的表現 (Pauli 表現) を得ることができる。

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Pauli 表現はもちろん表現の1つで、ユニタリー変換により無数の表現が可能であるが、測定可能量の計算結果は当然すべて同じになる。ただし、最低4次元必要であることから、スピン自由度、粒子-反粒子 (アイソスピン) 自由度が空間的に点である電子-陽電子に存在することになる。これはスピン 1/2 の質量を持つ粒子に対応する方程式である。

1.4.2 スピン角運動量

中心力場がある場合を考え、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_D + V(\mathbf{r}) \quad (1.48)$$

とする。軌道角運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.49)$$

は、ハミルトニアン (1.48) と一般に交換せず、

$$[\mathbf{L}, \mathcal{H}] = i\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad (1.50)$$

のようになる。 $\boldsymbol{\alpha}$ は α_k を要素とするベクトルである。一方、Pauli 行列を

$$\sigma_k^{(4)} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

のように 4×4 行列とし、 $\sigma_{x,y,z}^{(4)}$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{\sigma}$ と書くと、

$$[\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{H}] = -2i\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}/\hbar \quad (1.51)$$

であるから、全角運動量 \mathbf{J} を

全角運動量

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{s} \quad (1.52)$$

と定義すれば、

$$[\mathbf{J}, \mathcal{H}] = 0 \quad (1.53)$$

となり、 \mathbf{J} は運動の恒量となる。すなわち、 $\mathbf{s} \equiv (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ が角運動量の性格を持つオブザーバブルであることを示している。これが、**スピン角運動量**である。結局、電子は点であるにも関わらず、それ自身において角運動量を持ち、あたかも自転しているように見えることがわかった。

1.4.3 磁気モーメント

静電磁場が存在する場合の Dirac 方程式を考える。式 (1.32) と同様に、スカラー及びベクトルポテンシャルを導入し、

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m - e\phi] \psi \quad (1.54)$$

となる。これを

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right) - c \sum_{j=x,y,z} \alpha_j \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r_j} + eA_j \right) - \beta mc^2 \right] \psi = 0 \quad (1.55)$$

と書く。これに左から演算子

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi + c \sum_{j=x,y,z} \alpha_j \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r_j} + eA_j \right) + \beta mc^2 \quad (1.56)$$

を作用させ、 α_j , β などの交換関係を使って多少計算すると、次が得られる。

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - m^2c^4 + ic\hbar e(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}) + i\hbar c^2 e(\alpha_x\alpha_y B_z + \alpha_y\alpha_z B_x + \alpha_z\alpha_x B_y) \right] \psi = 0. \quad (1.57)$$

ここで、

$$\alpha_x\alpha_y = i\sigma_z^{(4)}, \quad \alpha_y\alpha_z = i\sigma_x^{(4)}, \quad \alpha_z\alpha_x = i\sigma_y^{(4)} \quad (1.58)$$

であるから、(1.57) は、

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - m^2c^4 + ic\hbar e(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}) - \hbar c^2 e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi = 0 \quad (1.59)$$

となる。定常解を考え

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-iet/\hbar)\varphi(\mathbf{r}) \quad (1.60)$$

と置くと、

$$\left[(\epsilon + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - m^2c^4 + ic\hbar e(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}) - \hbar c^2 e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi = 0. \quad (1.61)$$

ここで、 $\phi = 0$, $\mathbf{E} = 0$ としよう。非相対論近似、 $p \ll mc$, したがって、 $\epsilon \approx mc^2$ より、 $\epsilon = mc^2 + \delta$ と置き、 δ/mc^2 の2次以上の項を無視すると、

$$\left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi = \delta\varphi \quad (1.62)$$

となる*2。ここで、

ボーア磁子

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} \approx 9.274 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1} \quad (1.63)$$

とボーア磁子 (Bohr magneton) と呼ばれる量を定義すると、式 (1.62) で磁場に関係した項は

$$\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \frac{2}{\hbar} \mu_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \quad (1.64)$$

となる。すなわち、電子はスピン角運動量 \mathbf{s} に伴い、 $-2\mu_B \mathbf{s}/\hbar$ という磁気モーメントを持つことが示された。

付録 1A：電磁気の単位系

単位系は、科学や学問の枠すら超えて人間生活に極めて重要なものである。単位は通常、少数の基礎単位を何らかの方法で決め、他は普遍的物理法則を用いて決定する。当然、様々な取り方が可能である。特に電磁気の単位系は、対象とする現象すなわち考える問題によってそれぞれ都合の良いものが多数存在する。単位系はその専門家でなくても一家言ある方が多く、万人に対してこれ、と決めてしまうのは困難である。そのような中、実用性、論理整合性、歴史的な継続性を勘案して国際標準として定められているのが SI(Système International) 単位系 (国際単位系) であり、本講義でも極力これを使用するが、ここでごく簡単に主な電磁気の単位系の紹介をしておく。興味のある方は、詳しい文献 [5, 6, 7] を参照して欲しい。ただし、特に SI 単位系は毎年会議が開かれ、2019 年のように大きな変更があることもあって、最新の定義は web などを参照する必要がある。ここでは、CGS 静磁単位系 (electrostatic system of unit, esu)、MKSA 単位系 (SI 単位系) について簡単に述べておく。

*2 この φ は 4 元の波動関数であり、本来は、4 元から非相対論近似により 2 元に落とす手続きが必要であるが、簡単のため略した。この結果は同じであるが、スピン軌道相互作用の導出にはこの手続きは不可欠である。

1A.1 CGS 静電単位系

Coulomb の法則を

$$F = k_q \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1A.1)$$

と書く。CGS 静電単位系は k_q を無次元係数 1 において、これから、電荷を [L], [M], [T] により

$$[Q] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}]$$

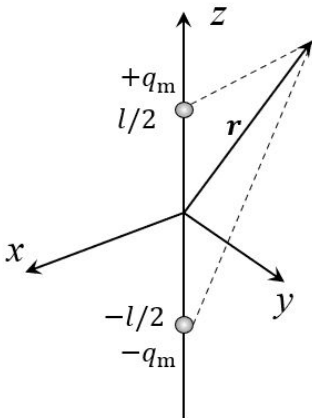
とする。距離 1 cm の同量電荷が 1 dyn の力を及ぼすとき、この電荷を 1 esu (CGS esu) とする。基本量は 3 つであり、Coulomb の法則に $(4\pi)^{-1}$ が現れないこと (したがって、Maxwell 方程式に 4π が現れる) から、3 元非有理化単位系に分類される。

1A.2 MKSA 単位系

少し前まで、電流を 4 番目の基本量として導入し、電流の単位を A (ampere) とし、1 A は真空中で 1 m 隔てておいた平行導線間に働く力が長さ 1 m あたり 2×10^{-7} N となるような電流と定められていた。しかし、2019 年の単位改訂により、4 番目の基本量は電荷、そしてこれは、電荷素量 e を $1.602176634 \times 10^{-19}$ C (coulomb) とすることで導入され、電流は、A·s から決められるようになった。基本量は 4 つで、 k_q に $(4\pi)^{-1}$ が現れることから、4 元有理化単位系に分類される。

付録 1B：双極子磁場と双極子相互作用

1B.1 磁気双極子の作る磁場



(1.1d) より、真電流と電場の時間変化がない状況では、磁場の回転 $\nabla \times \mathbf{B}$ が存在しないため、静電ポテンシャルに対応して空間座標 \mathbf{r} に対するスカラー関数 静磁ポテンシャル (磁位) ϕ_m を考えることができ、

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m \quad (1B.1)$$

で磁場を与えるようにすることができる。図 1B.1 のように、 $\mathbf{p} \equiv (0, 0, l/2)$ に磁荷 $+q_m$ 、 $(0, 0, -l/2) = -\mathbf{p}$ に磁荷 $-q_m$ を置いた場合の静磁ポテンシャル ϕ_m を考える。

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{q_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{p}|} - \frac{q_m}{|\mathbf{r} + \mathbf{p}|} \right). \quad (1B.2)$$

l が $|\mathbf{r}|$ に比して十分小さい ($|\mathbf{r}| \gg l$) として、 ϕ_m の l によるべき展開を考え、1 次の項を取ると、

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{q_m}{4\pi\mu_0} \frac{lz}{r^3} = \frac{q_m l}{4\pi\mu_0} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (1B.3)$$

図 1B.1 磁荷を考えた磁気双極子

最右項は極座標 (r, θ, φ) で書いたものである。

$\mathbf{l} = (0, 0, l)$ として、磁気モーメントを $\boldsymbol{\mu} = q_m \mathbf{l} / \mu_0$ と書くと、この磁気双極子の作る磁場は

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \nabla \left(\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (1B.4)$$

と書くことができる。ここで、 ∇ の極座標での表示

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1B.5)$$

を式 (1B.3) に適用すると,

$$B_r = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{4\pi\mu_0} \frac{2\cos\theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{4\pi\mu_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \quad (1B.6)$$

となって, 式 (1.6) が得られた.

1B.2 円電流の極限としての双極子磁場

本文では, 実際には存在しない「磁荷」という仮想的なものを主に考えて議論を進めた. 磁荷は, 現在までの実験から見る限り, 電荷のように単離できる単磁極は存在しない. そこで, 磁荷を概念としても使うべきではないとする立場もある. 一方, 例えばベクトルポテンシャルのように, 数学的便法として導入され間接的にしか観測できないものであっても物理概念として確立されているものがあり, 単磁極がなくても磁荷はきちんとした物理概念として認め, 積極的に使用すべきだ, とする立場もある [2].

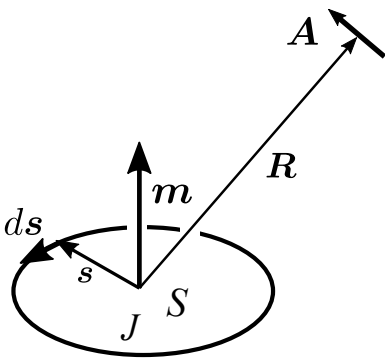


図 1B.2 円電流で磁気双極子を定義

また, Maxwell 方程式 (1.1) に見られる一種の電場-磁場の対称性をどう考えるか, という問題にも多少関係している. すなわち, いわゆる \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応, \mathbf{E} - \mathbf{H} 対応の問題である. 前者では, 磁気はビオ-サバルの法則に基づき, 電流素片の作る磁場として導入され, 後者では磁荷がクーロンの法則によって作るものとして導入される. CGS 単位系の場合は, これら 2 つの間に差がないが, 面倒なことに MKSA 単位系の場合, 磁化の単位が変わってしまう. これは, 磁荷によって磁気双極子を導入する場合でも実は同じことで, 偶力モーメント (1.2) を考える際に, 電荷-電場の場合の \mathbf{E} に \mathbf{H} を対応させるか \mathbf{B} を対応させるかで, (1.3) に μ_0 がつくかどうかが変わる. この講義は電磁気学の構成法についてまでは立ち入らないが, 特に意識はしていないものの, この分類で呼ぶなら \mathbf{E} - \mathbf{B} 対応による磁化の単位を採用していることになる.

さて, 図 1B.2 のような xy 面内にある面積 S を囲む円電流 J を考える.

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}}{r} dv = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}}{r} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{1}{R} \oint \left\{ 1 + \frac{1}{R^2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) + \dots \right\} \\ &\simeq \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{1}{R^3} \oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (1B.7)$$

である.

$d\mathbf{s}$ の内, s_x の積分成分は

$$\oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) ds_x = \oint \sum_{i=x,y,z} R_i s_i ds_x = \sum_{i=y,z} R_i \oint s_i ds_x$$

となって, $R_x s_x$ は落ちる. s_x 軸上で被積分対象は軸上を往復し, 往復積分で相殺するためである. 一方, $s_y ds_x$, $s_x ds_y$ については, 右図のように面積 S に対して

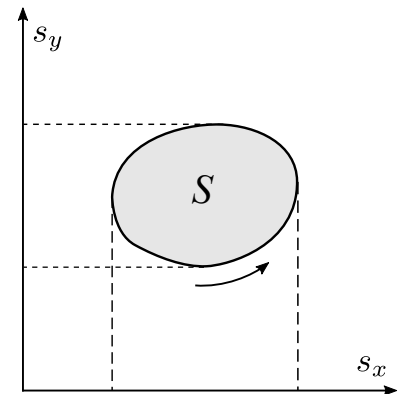
$$\oint s_y ds_x = - \oint s_x ds_y = -S$$

である. 以上から,

$$\oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} = - \oint (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{s}) s$$

となるので, ベクトル演算公式より

$$\oint (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \oint \{ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} - (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{s}) \mathbf{s} \} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{s} \times d\mathbf{s}) \times \mathbf{R} \quad (1B.8)$$



とすることができる。ここで、

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{s} \times d\mathbf{s}$$

は、ベクトル外積の定義より、円電流の面積を大きさとし、電流面に垂直なベクトルである。そこで、

$$\boldsymbol{\mu} = J \left(\frac{1}{2} \oint \mathbf{s} \times d\mathbf{s} \right) \quad (1B.9)$$

とベクトル $\boldsymbol{\mu}$ を定義すると、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (1B.10)$$

である。これを用いて、例えば、 \mathbf{B} の x 成分を計算すると、多少の計算の後、次が得られる。

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)_x. \quad (1B.11)$$

以上より、円電流が作る磁場が

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1B.12)$$

となり、式 (1B.4) より、円電流が磁気双極子として扱えることがわかる。

1B.3 双極子相互作用

(工事中：来週までお待ちください)

参考文献

- [1] P. J. Flanders. An alternating-gradient magnetometer (invited). *Journal of Applied Physics*, Vol. 63, No. 8, pp. 3940–3945, April 1988.
- [2] 近角聡信. 強磁性体の物理 (上): 物質の磁性 (物理学選書 4). 裳華房, 単行本, 10 1978.
- [3] 朝永振一郎. スピンはめぐる一成熟期の量子力学 (自然選書). 中央公論社, 7 1974.
- [4] 西島和彦. 相対論的量子力学 (新物理学シリーズ 13). 培風館, 単行本, 4 1973.
- [5] 青野修. 電磁気学の単位系 (パリティ物理学コースクローズアップ). 丸善, 9 1990.
- [6] 高梨弘毅. 磁気工学入門 -磁気の初歩と単位の理解のために- (現代講座・磁気工学). 共立出版, 9 2008.
- [7] 和田純夫, 大上雅史, 根本和昭. 新・単位がわかると物理がわかる. ベレ出版, 12 2014.