

講義ノート 磁性 第10回

2022年6月15日 勝本信吾 東京大学物性研究所 (理学系研究科物理学専攻)

前回, Holstein-Primakoff 変換まで話を進めた. どのようなアプローチでスピン波を扱っているのか, 若干説明不足だったかもしれないので, 付録 10A で若干加筆した.

Holstein-Primakoff 変換のような不思議なものを導入する必要は, 今相手にしている量 (スピン) が, 電子の位置など古典力学で正準座標とみなされるような量とは異なるため, 場の量子論の一般論がそのまま適用できないことから生じている. このような量子化の問題点は, 色々指摘されており [1], 特に, 式 (5.72) で本来 n は $2S$ までしか存在しないはずであるが, この式の形では, $2S$ を超えて定義することが可能になる点が問題とされている. この時, 拡張された関数空間と, 本来の物理関数空間との間には行列要素が存在しないことが証明されている [2]. ただし, これはすべてを正確に扱った場合であり, 近似を行うとその限りではないので, やはり注意は必要である. n の小さなところで扱う場合は数学的な問題はない.

Holstein-Primakoff 法を Heisenberg 模型に適用すると, ボソン集合化はされるものの, 式 (5.73) の非線形項の影響によってボソン間に相互作用が生じる. これを調和振動子の和に近似するには, 相互作用を無視するように, 以下のように近似する. 式 (5.73) を展開して

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_{j+} &= \sqrt{2S} \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{4S} + \dots \right) a_j, \\ \hat{S}_{j-} &= \sqrt{2S} a_j^\dagger \left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{4S} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

として, Heisenberg 模型に代入し,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j = -2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \{ \hat{S}_{iz} \hat{S}_{jz} + (\hat{S}_{i+} \hat{S}_{j-} + \hat{S}_{i-} \hat{S}_{j+}) / 2 \} \\ &= -2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \left[S^2 - S(\hat{n}_i + \hat{n}_j) + S(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i) + \hat{n}_i \hat{n}_j - \frac{1}{4} a_i^\dagger a_j^\dagger a_j a_i - \frac{1}{4} a_j^\dagger a_i^\dagger a_i a_j + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

となる. $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ である. ここで, a_i, a_i^\dagger の 2 次までを取り, 4 次以上の項を省略する.

$$\mathcal{H} = -2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} [S^2 - S(\hat{n}_i + \hat{n}_j) + S(a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i)] \quad (5.76)$$

これは, S が入った項のみ拾う近似でもある.

a_j^\dagger, a_j の Fourier 変換 a_q^\dagger, a_q を

$$\left. \begin{aligned} a_q &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \\ a_q^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j a_j^\dagger \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

で定義し, 上記 Hamiltonian に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -2 \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S^2 + 2 \sum_{\mathbf{q}} [J_0 - J_{\mathbf{q}}] S a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \\ &= E_0 + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.78)$$

となって, 相互作用のないスピン波の集合として書けている. 高次の項を順次取り込むことで, 相互作用を低次から考えていくこともできる. このようにボソンとして量子化したスピン波を **マグノン** (magnon) と呼ぶ.

5.8.3 マグノンと低温の諸量

式 (5.76) の近似で見たように、独立なマグノン近似はマグノン間の相互作用を無視したことに相当する。従って、温度が高く多数のマグノンが励起されている状態では、近似が悪くなる。そこで、低温領域での物理量に対するマグノンの寄与を考える。磁化は、磁場を z 向きに取っているので、

$$M = \mu \left\langle \sum_i S_{iz} \right\rangle = \mu SN - \mu \sum_i \langle a_i^\dagger a_i \rangle = \mu SN - \mu \sum_{\mathbf{q}} n(\epsilon_{\mathbf{q}}) \quad (5.79)$$

である。ここで、

$$n(\epsilon) = \left(\exp \frac{\epsilon}{k_B T} - 1 \right)^{-1} \quad (5.80)$$

は、ボース分布関数である。式 (5.78) より、 $\hbar\epsilon_{\mathbf{q}} = 2S(J_0 - J_{\mathbf{q}})$ である。交換相互作用が最近接のみに働き、その大きさが J であるとする。最近接サイト間距離を a とし、正方格子で考えることにして、考えている q ベクトルの方向を格子方向にとると、

$$\hbar\epsilon_{\mathbf{q}} = 2S(J_0 - J_{\mathbf{q}}) = 2SJ \{ 2 - [\exp(iqa) + \exp(-iqa)] \} \simeq 2SJ \left[2 - 2 \left(1 - \frac{(qa)^2}{2} \right) \right] = 2SJ(qa)^2 \quad (5.81)$$

である。以上より、ボース分布関数の低温漸近形を使って

$$M = \mu N \left[S - \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{k_B T}{8\pi JS} \right)^{3/2} \right] \quad (5.82)$$

と書くことができる。ここで、 $\zeta(x)$ はリーマンの ζ -関数で、 $\zeta(3/2) \approx 2.61$ である。

次に、低温比熱を考える。内部エネルギーは、やはり低温漸近形と分散関係により

$$U = E_0 + \sum_{\mathbf{q}} n(\epsilon_{\mathbf{q}}) = E_0 + 12\pi JSN \zeta \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{k_B T}{8\pi JS} \right)^{5/2}. \quad (5.83)$$

これより、比熱は

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{15}{4} N k_B \zeta \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{k_B T}{8\pi JS} \right)^{3/2} \quad (5.84)$$

と求められる。

5.8.4 反強磁性スピン波

次に反強磁性について同様に考える。5.5 節と同様に、反平行秩序状態を持つ A, B 副格子を考える。各副格子内では強磁性的であると考えれば、A 副格子内では式 (5.73) の Holstein-Primakoff 変換が使えると期待される。A 副格子を伝わるマグノンがあったとして、B 副格子も当然これに影響され、 z 軸周りの歳差運動が伝わると思われる。しかし、B 副格子に関しては、有効磁場の向きが逆であるから、本来の歳差運動の回転方向は逆であり、結局 2 種類のマグノンが相互作用をする形になっていると考えられる。

そこで、B 副格子では、別種の boson を考えることにし、こちらについては、A 副格子と逆向きが基底状態であるから、サイト j の boson の生成消滅演算子を b_j^\dagger , b_j と置き、真空状態としては $|0\rangle_B = |-S\rangle$ を考えるべきである。従って B 副格子のサイト j ($j \in B$) について

$$\left. \begin{aligned} S_{jz} &= -S + b_j^\dagger b_j, \\ S_{j+} &= b_j^\dagger \sqrt{2S - b_j^\dagger b_j}, \\ S_{j-} &= \sqrt{2S - b_j^\dagger b_j} b_j \end{aligned} \right\} \quad (5.85)$$

という変換を行う。

強磁性の場合と同様に、(5.73) と (5.85) を反強磁性 Heisenberg 模型に代入して boson 演算子の 2 次までで落とす近似を行うと、

$$\mathcal{H} = -\alpha_z |J| N S^2 + 2|J| S \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_i + b_j^\dagger b_j + a_i b_j + a_i^\dagger b_j^\dagger), \quad (5.86)$$

ただし、 $i \in A$, $j \in B$ である。 a_i, b_j の Fourier 変換を

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i), \\ b_j &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

と書き、Hamiltonian を

$$\mathcal{H} = -\alpha_z |J| N S^2 + 2\alpha_z |J| S \sum_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} + \gamma(\mathbf{q})(a_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}^\dagger + a_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}})] \quad (5.88)$$

と変換する。ただし、 $\gamma(\mathbf{q})$ は

$$\gamma(\mathbf{q}) = \alpha_z^{-1} \sum_{\rho} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}) \quad (5.89)$$

と定義され、 $\boldsymbol{\rho}$ は 1 つのスピンの相互作用をするスピンとを結ぶベクトルである。

この Hamiltonian の対角化のために次の Bogoliubov 変換と呼ばれる変換 $(a_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}}) \rightarrow (\alpha_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}})$ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathbf{q}} &= \cosh \theta_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{q}} - \sinh \theta_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}}^\dagger, \\ b_{\mathbf{q}} &= \cosh \theta_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}} - \sinh \theta_{\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{q}}^\dagger. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

$(\alpha_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}})$ は次の boson 交換関係を満たしている。

$$[\alpha_{\mathbf{q}}, \alpha_{\mathbf{q}}^\dagger] = 1, \quad [\beta_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}}^\dagger] = 1, \quad [\alpha_{\mathbf{q}}, \beta_{\mathbf{q}}] = [\alpha_{\mathbf{q}}^\dagger, \beta_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0. \quad (5.91)$$

Hamiltonian を書いてみると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = -\alpha_z |J| N S^2 + 2\alpha_z |J| S \sum_{\mathbf{q}} [& (\cosh 2\theta_{\mathbf{q}} - \gamma(\mathbf{q}) \sinh \theta_{\mathbf{q}})(\alpha_{\mathbf{q}}^\dagger \alpha_{\mathbf{q}} + \beta_{\mathbf{q}}^\dagger \beta_{\mathbf{q}} + 1) \\ & - 1 - (\sinh 2\theta_{\mathbf{q}} - \gamma(\mathbf{q}) \cosh 2\theta_{\mathbf{q}})(\alpha_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}} + \alpha_{\mathbf{q}}^\dagger \beta_{\mathbf{q}}^\dagger)] \end{aligned} \quad (5.92)$$

であるから、最後の非対角項が消えるためには

$$\sinh 2\theta_{\mathbf{q}} / \cosh 2\theta_{\mathbf{q}} = \tanh 2\theta_{\mathbf{q}} = \gamma(\mathbf{q}) \quad (5.93)$$

と $\theta_{\mathbf{q}}$ を選べばよい。こうして、対角化 Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -\alpha_z |J| N S^2 + 2\alpha_z |J| S \sum_{\mathbf{q}} [(\sqrt{1 - \gamma(\mathbf{q})^2} - 1) + \sqrt{1 - \gamma(\mathbf{q})^2}(\alpha_{\mathbf{q}}^\dagger \alpha_{\mathbf{q}} + \beta_{\mathbf{q}}^\dagger \beta_{\mathbf{q}})] \quad (5.94)$$

が得られる。

式 (5.94) で演算子のついていない最初の 2 項は基底状態のエネルギーで、第 1 項は最初からある Néel 秩序状態のエネルギー、これに対して対角化で出てきた第 2 項は、マグノンのゼロ点振動の寄与と解釈することも可能である。すなわち、古典的な Néel 秩序状態は、強磁性の場合と異なり量子力学的な基底状態ではなく、反強磁性相互作用を通して $S_{jz} = S, S-1, \dots, -S$ という状態間に混じりが生じて、この摂動のためにエネルギーが下がる。この分、副格子磁化すなわち、サイトあたりのスピンの期待値が基底状態ではフルの S から若干縮んでいる (エネルギーの低下はこのため、とも言える)。その「縮み具合」は

$$\langle S_{jz} \rangle = S - \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}} \sinh \theta_{\mathbf{q}} = S - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma(\mathbf{q})^2}} - 1 \right) \quad (5.95)$$

である。下の表に、やや進んだ近似により計算されたスピンの「縮み」($\langle S_{jz} \rangle = S - \Delta$ で定義される Δ)、およびエネルギーの変化 ($E_0 = N|J|\alpha_z S(S + \epsilon)$ で定義される ϵ)を、簡単な格子形について計算した結果 ([3])を示す。

Lattice	Square	Simple Cubic	Body Centered Cubic
Δ	0.917	0.078	0.0593
ϵ	$0.158+0.0062S^{-1}$	$0.097+0.0024S^{-1}$	$0.073+0.0013S^{-1}$

式 (5.94) の最後の 2 項が表している反強磁性マグノンは、A, B 副格子の同等性を反映して、縮退している。その分散関係は

$$\epsilon_q = 2\alpha_z |J| S \sqrt{1 - \gamma(\mathbf{q})^2} \quad (5.96)$$

である。単位胞幅 a の単純立方格子について式 (5.89) により $\gamma(\mathbf{q})$ を計算すると、長波長極限で

$$\epsilon_q = 2\sqrt{2}\alpha_z |J| Saq \quad (5.97)$$

となり、線形の分散関係を持っている。

実験にかかりやすい量として、比熱を考えよう。強磁性の場合と同様、内部エネルギーを考えると、最低エネルギー状態を与える最初の 2 項を E_0 として、単純立方格子の場合、

$$U = E_0 + \frac{\pi^2}{15} N \left(\frac{k_B T}{2\sqrt{2}\alpha_z |J| S} \right)^3 k_B T \quad (5.98)$$

と求められる。これから得られる比熱、また 1 次元、2 次元の場合などについて、次の表にまとめられている [3]。

Lattice	1D Chain	2D Square Lattice	3D Simple Cubic
$\frac{E_0}{\alpha_z J N S^2}$	$1+0.363S^{-1}$	$1+0.158S^{-1}$	$1+0.097S^{-1}$
$\frac{C}{Nk_B}$	$\frac{2\pi}{3} \left(\frac{k_B T}{2\alpha_z J S} \right)$	$\frac{14.42}{\pi} \left(\frac{k_B T}{2\alpha_z J S} \right)^2$	$4\sqrt{3} \frac{\pi^2}{5} \left(\frac{k_B T}{2\alpha_z J S} \right)^3$
ΔS	Diverge	0.197	0.078

マグノンを考えるのは、低温からの熱揺らぎの効果を正確に扱うことが第一義であった。特に反強磁性体の場合、現実の物質でも理論模型に近いものが存在し、その性質を簡単な模型で説明できるかどうかが大変な問題である。図 5.8 に有機反強磁性体 κ -(BETS) $_2$ FeBr $_4$ (BETS = bis(ethylenedithio)tetraselenafulvalene) の結晶構造と比熱を示した

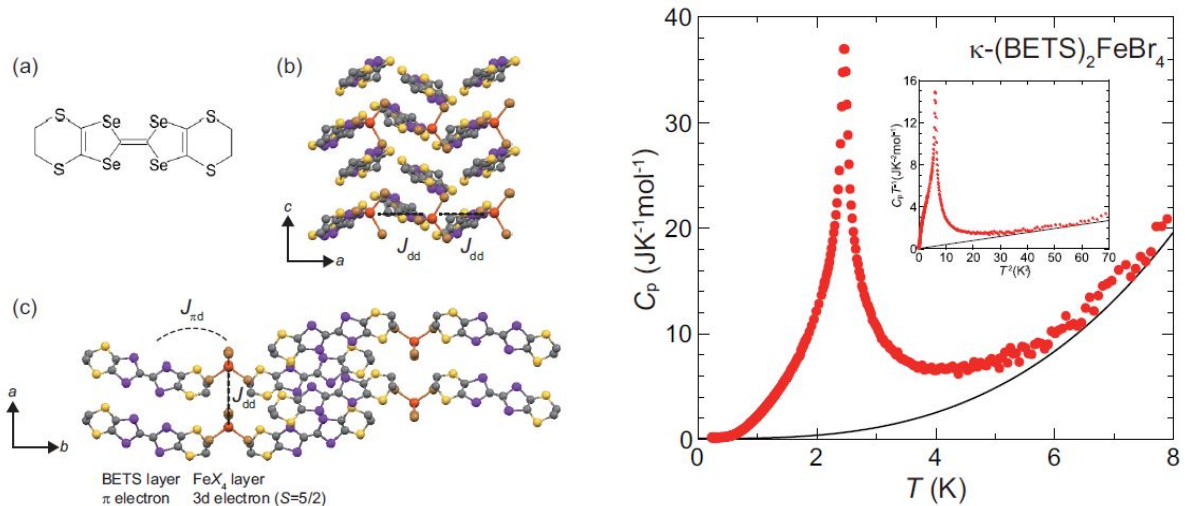


図 5.8 κ -(BETS) $_2$ FeX $_4$ の結晶構造と低温比熱。左：(a) BETS の分子構造。(b) b 軸方向から見た結晶の様子。BETS 分子が交互に傾いて並んでいる。(c) c 軸から見た結晶の様子。右：X=Br の試料の低温磁気比熱。高温の振舞いからフィットした、フォノンの T^3 の寄与を黒線で示している。挿入図は、縦軸を $C_p T^{-1}$ 、横軸を T^2 でプロットしたもの [4]。

[4]. この物質は、本来は本章の主題である磁性絶縁体ではなく、伝導は金属的で、低温では、 $T_N = 2.47$ K で反強磁性体となり、更に 1.1 K で超伝導に転移する。左図の結晶構造にあるように、比較的小さな分子が並んだ構造をとっており、 ab 面内は π 結合で比較的電子が広がっており、これが c 軸方向に積層されている。反強磁性を担うのは、Fe の $S=5/2$ の $3d$ スピンであり、ただし、相互作用は、 d 同士の J_{dd} と、 π を介する $J_{\pi d}$ があるとされる。

図 5.8 の右図が比熱の測定結果であり、 T_N で非常にシャープな立ち上がりが見られる。これは、5.3 節の図で示した T_C での「飛び」に対応する。挿入図は T^2 に対して C_p/T をプロットしたものである。通常の金属の持つ温度に比例する電子比熱 ($\propto T$)、温度の 3 乗に比例する格子比熱 ($\propto T^3$) の和で、 $C_m = AT + BT^3$ と書けたとすると、このプロットでは、 $C_m/T = A + BT^2$ となり、この寄与は直線で表される。高温側でフィットした結果から、電子の寄与が大変小さいことがわかる。 T_N より低温側では、 T^2 的に変化しているように見える。というのは、超伝導による寄与は無視できる状態で、上記プロットに若干の「上に凸」カーブが見られるためである。これは一応、上記の表の 2 次元と定性的には一致しているように思われる。ただし、この論文では、特に高温側は反強磁性 1 次元鎖の理論に合っている、としている。

5.8.5 南部-Goldstone の定理とスピン波

Heisenberg 模型において、強磁性転移を説明した際に、自発的対称性の破れの概念の説明を行った。典型的な連続な相転移においては、何らかの対称性が破れ、それと同時に何らかの秩序が生じる、

南部-Goldstone の定理は次のようにまとめられる。

南部-Goldstone の定理

物理系の対称性が自発的に破れると、長波長極限でエネルギー (ギャップ) がゼロとなる励起が存在する。

「質量ゼロの励起」と表現される場合もある。上記メッセージと同じと考えれば、静止エネルギー $E = mc^2$ でギャップレスにより $E = 0$ 、したがって $m = 0$ ということになる。

このことは、強磁性転移では直観的な理解が可能である。5.2 節の現象論では図 5.2(a)→(b) のように、自由エネルギー $\mathcal{F}(M)$ に 2 つの極小が現れて自発的対称性の破れが生じることを説明した。ところが、例えば 2 次元 Heisenberg 模型は等方的であるから、仮に $\mathbf{M} = (M_x, M_y) = (M_0, 0)$ に最初いたとしても、 $(M_0 \cos \theta, M_0 \sin \theta)$ 状態は、図 5.9 右パネルに示したように θ によらず同じ自由エネルギー状態で、ゼロエネルギーで状態間を遷移できる。黄色い線で示したこのような運動が、南部-Goldstone (NG) モードである。これは、マクロな磁化全体が回転しており、長波長極限の運動とみることができる。

本節で、スピン波 (マグノン) を導入した際、各サイトのスピンの歳差運動周波数は内部磁場で決まっていたが、マグノンはこれら歳差運動の位相差によって波数が決まるため、長波長極限を取ることができ、長波長極限では位相差

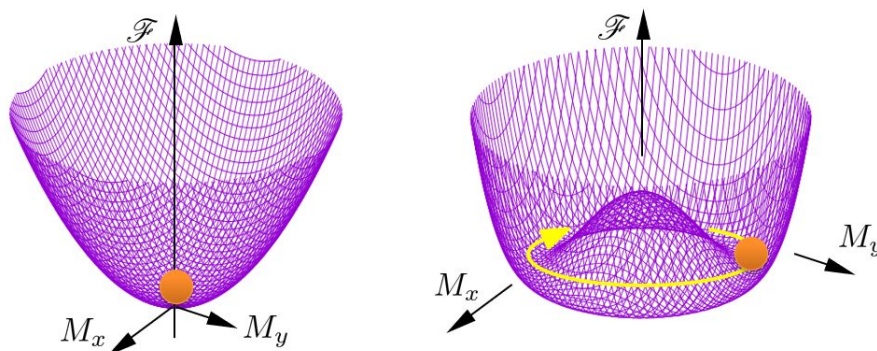


図 5.9 左：回転対称性を持った系の状態。マクロな磁化 ((M_x, M_y) 平面) がゼロの状態が自由エネルギー \mathcal{F} が最低状態。右：自発的対称性の破れが発生し、秩序パラメーター (マクロな磁化) が生じた状態。 \mathcal{F} を最低にする状態が連続的に現れ、エネルギーなしに遷移できる (南部-Goldstone モード)。

はゼロでスピンはすべて向きをそろえて歳差運動を行っている状態である。すなわち、図 5.9 右パネルのような、縮退基底状態をつなぐ南部-Goldstone モードであるということが出来る。強磁性マグノンの場合、分散関係は式 (5.81) のように波数 q の 2 乗に比例する。一方、反強磁性マグノンでは、式 (5.96) のように波数に比例している。後者のようなものを type-A、前者のようなものを type-B の NG モードと呼ぶことがある。一方、Nielsen-Chadha[5] は、 $\hbar\omega \propto k^{2n+1}$ の場合を type-I、 $\hbar\omega \propto k^{2n}$ の場合を type-II と呼んでいる。

以上は、素粒子の質量の獲得に関して超伝導 BCS 理論をモデルにした南部陽一郎の考えに端を発したものであることはすでに述べた。ここから素粒子の標準理論が大発展を遂げることは皆の知る通りである。また、物性理論においても Anderson に“Basic notions”の中でも中心的なコンセプトとして紹介されるほど大切なものとなった [6]。それでも、NG モードの基礎的な部分で十分に理解されていない問題が沢山あり、最近になっても重要な発見があるのは誠に驚くべきことである。一例としては、素朴な NG 定理においては、破れた対称性の数 N_{BS} と NG モードの数 N_{NG} が等しくなる ($N_{BS} = N_{NG}$) はずであるが、極めて簡単な例でも成立していない場合が沢山ある。例えば、3 次元の強磁性転移の場合でも、2 軸の回転対称性を破っているので $N_{BS} = 2$ であるが、単純強磁性マグノンの NG モードは 1 種類で、 $N_{NG} = 1$ である。これについては、Nielsen らによる先駆的な仕事 [5] など下敷きに、渡辺・村山 [7]、および日高 [8] により 2012 年に満足すべき解答が得られた。これは、NG 定理の一般化と呼べるもので、ごく簡単に言うと、type-I と type-II の NG モードの数をそれぞれ N_I 、 N_{II} とすると、

$$N_I + 2N_{II} = N_{BS}$$

である。詳細は、レビュー論文 [9] などを参照のこと。

5.9 マグノンに関連した実験

前節で見たように、マグノンは基底状態からの励起で、磁性体の有限温度でのマクロな諸量を考えるために考案された素励起である。しかし、最近では、マグノンの波動や波束、粒子的な側面を調べたり、本来スピン波近似が良くないとされていた密度の高い非線形領域でソリトン励起を調べたり、ボース-アインシュタイン凝縮を考える、といった、元来の近似を超えた領域での物理学が大きな広がりを見せるようになった。「マグノニクス」という言葉まで誕生し、量子情報処理に使用することが真剣に検討されている [10]。レビューも [11] など沢山出ており、成書も相当数見つけることができる [12]。

ここでは、古いが現状の基礎になっている実験を中心に簡単に紹介しておく。

5.9.1 中性子散乱によるマグノン分散関係の測定

中性子散乱は、古くから微視的な磁気構造の測定手段として使用され、現在でも原子分解能を持つ確かな実験手法として最も強力なものであると言って差し支えない。特に、マグノンの分散測定に関しては、非弾性散乱が使用された。

原子の持つ電子の磁気モーメント μ_e と中性子の磁気モーメント間の相互作用を

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mu_e \cdot B_n \quad (5.99)$$

と書く。ここで、

$$B_n = \text{rot} \left(\mu_n \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (5.100)$$

は、中性子の磁気モーメント μ_n がつくる磁場で、 \mathbf{r} は電子と中性子を結ぶベクトルである。中性子がこのような相互作用によって

$$\hbar\mathbf{k} \longrightarrow \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (5.101)$$

のように散乱されたとする。この時のエネルギー変化は

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2M} (-2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + q^2) \quad (5.102)$$

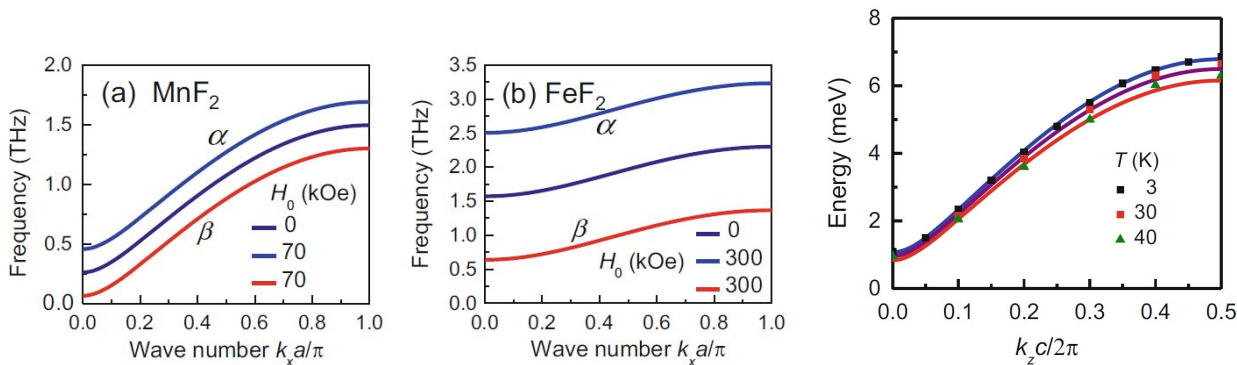


図 5.10 (a), (b) MnF_2 , FeF_2 の (異方性磁場を取り入れた) 計算による, マグノンの分散特性. [12] より. 右パネル: 中性子非弾性散乱の飛行時間法で測定した MnF_2 のマグノンの分散特性. [13] より.

である. ごく単純には, 適当なエネルギーの中性子を照射し, 散乱された中性子のエネルギー (運動量) と角度とを測定することでこの 2 つによって一定の情報が得られる. これが ($\Delta E \neq 0$ の場合) 中性子の **非弾性散乱** 実験である. 一方, 式 (5.102) において, $\Delta E = 0$ の弾性散乱の場合は, 中性子の波動としての性質, 回折が重要になる.

マグノンの分散特性を調べるのに使用されるのは, 非弾性散乱法であり, 上記, (5.101) と (5.102) の情報を得るために, 飛行時間 (time-of-flight, TOF) 法が良く使用される. 図 5.10 は, TOF 法を用いて MnF_2 のマグノン分散関係を調べたもの [13] で, 左の (a) の異方性磁場を取り入れた分子場近似の計算と良い一致を示している.

5.9.2 マグノンのボース-アインシュタイン凝縮

マグノンを生成消滅演算子を使って導入した過程を思い出すと, $S_z = S$ の $|S\rangle$ 状態を真空 $|0\rangle_F$ とし (添え字の F は Fock 空間を表すものとして付けてみた), n だけ減った状態 $|S-n\rangle$ を $|n\rangle_F$ とした. 既に述べたように, 定義から n がマイナスの状態は存在しないが, 単純に生成演算子を演算することでプラス側には n は無制限に増加する. しかし, 現実には, S_z は, $-S$ までしか取ることができない. $n = 2S$ を超えた関数空間とは近似なしの正確な理論であれば遷移行列要素がなく, 問題は生じない. このことは, 強磁性マグノンの生成消滅演算子はボソンの交換関係を示してはいても, 「ひとつの状態が無限に粒子を収容できる」というボソンの統計的な性質がキーになる現象においては, これが本当に生じるかどうかは問題である. この意味で, マグノンの統計は完全なボース統計ではなくパラ統計と呼ばれるものである [14].

ボース統計に特徴的に現れる現象の代表が **ボース・アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein Condensation, BEC)** である. これについては, 付録 10B に簡単に紹介した. ヘリウムの超流動, レーザー冷却された原子気体の BEC がその代表である. これらについても, 粒子間に相互作用は存在するので, 付録に示した単純 BEC とは全く同じではない. また, フェルミオンが緩く結合した対が凝縮する超伝導なども類似現象である. マグノンも, パラ統計ではあるかもしれないが, 「ハードコアを持つボソン」として考え, BEC の類似現象が起こる可能性がないわけではない. ただ, 例えば, 磁化の計算 (5.79) などを見てもわかる通り, 熱平衡状態では素励起の場合温度低下と共に粒子数も減ってしまい, 最も単純な BEC の条件である, (平均ド・ブロイ波長)=(平均粒子間距離) (式 (10B.3)) を満たすのは一般に困難である. そこで, マイクロ波を使って特異的にマグノンを大量に励起し, マグノン系の温度だけが下がった非平衡系での BEC を観測する実験が行われている [15]. このように励起されたマグノン系による光のブリュアン散乱を調べ, その線幅が異常に狭くなる現象を調べている.

それが熱平衡状態で観測された, という例を紹介しよう [16, 17]. 上記のような事情で, ベースとなる磁性体もかなり特殊なものである. TiCuCl_3 という化学式で表される化合物で, 磁性イオンが 2 個ずつ一種の対 (ダイマー) になって反強磁性的に結合している. この対の状態は, 付録 3B で見たように, シングレット $|0, 0\rangle$ とトリプレット ($|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle$) があり, 反強磁性結合によりシングレットが基底状態で励起状態との間にはエネルギーギャップ (スピンギャップ) がある. 磁場により, $|1, 1\rangle$ のエネルギーが下がって, 磁場誘起転移が生じ, 磁性が発生する.

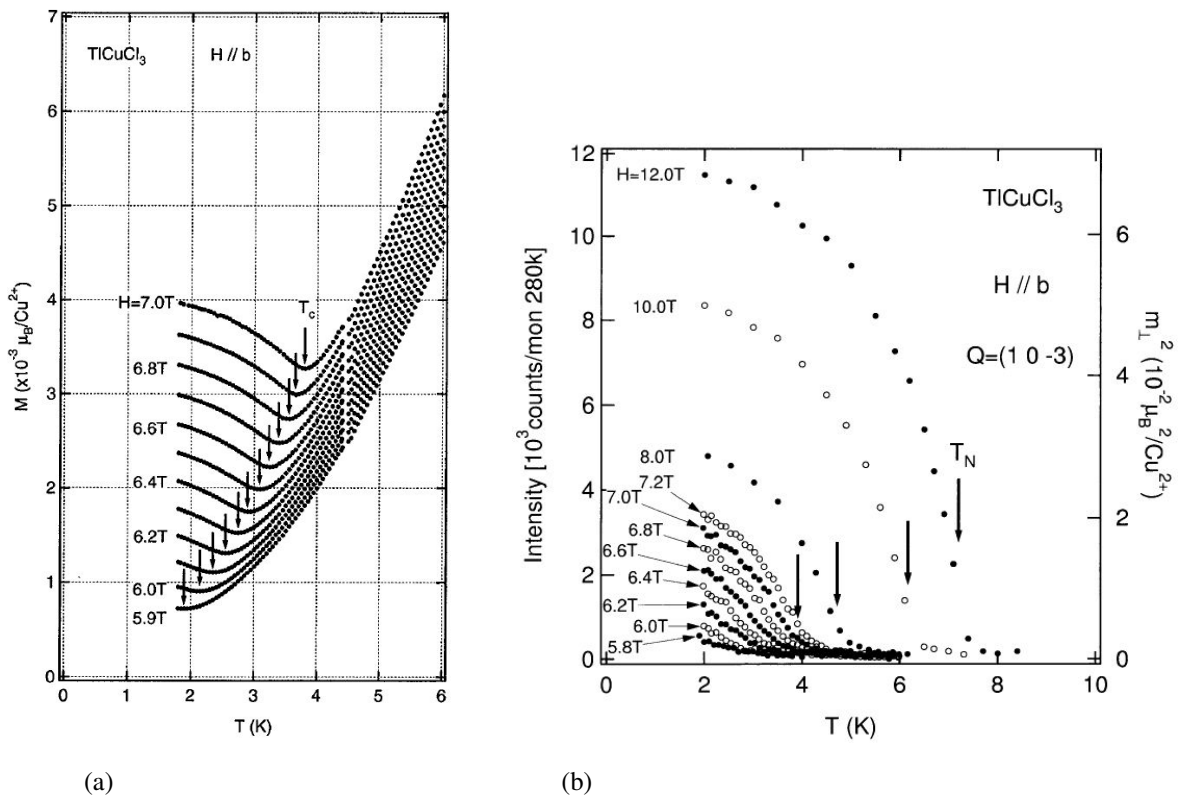


図 5.11 TiCuCl_3 で磁場中で調べられた、(a) 帯磁率の温度変化 [16], (b) 中性子回折での、ブラッグ反射 $(1,0,-3)$ の強度の温度変化 [17]. 右軸に示したように、1 サイトあたりの磁気モーメントの垂直成分の 2 乗に比例する.

この系では、この $|0,0\rangle$ と $|1,1\rangle$ のエネルギーが接近した時、 $|1,1\rangle$ 状態が隣接するダイマー状態に伝播していく励起状態がマグノンである. この例で明瞭にわかるように、マグノンの伝播はスピン角運動量の伝播でもあり、スピン角運動量の流れ—スピン流 (spin current) をもたらすものである.

このような系で、マグノンの BEC を考慮しない場合の磁化の振舞いは、高温域を良く説明する理論が作られており [18], ダイマーの反強磁性秩序状態への横方向磁化は、磁場誘起相転移後に温度に対して変化しないことを予言している. が、実験では、図 5.11(a) のように、低温に向かって一旦減少した磁化が、相転移点付近で反転し増加している. マグノン BEC 理論では、 $|0,0\rangle$ と $|1,1\rangle$ の混在系に秩序が生じて横方向磁化が生じるために低温へ向かって増大する、として実験を説明できる [16]. 更に図 5.11(b) のように、中性子回折を使い、実際にそのような秩序が生じていることが確認された [17]. 以上から、やや特殊ではあるが、マグノンの BEC が観測できた、とされている.

付録 10A：スピンの集団運動

強磁性状態は、スピン全体の方向が揃っていて、原子が格子を組んで自由度数が大幅に減少して極端には重心運動に束ねられてしまうと同様、そのダイナミクスを集団運動として記述することが可能である. 一方、格子には格子振動があるのと同様、基底状態からの励起として、やはり一種の集団運動が考えられ、フォノンのようにそれを更に量子化することが考えられる.

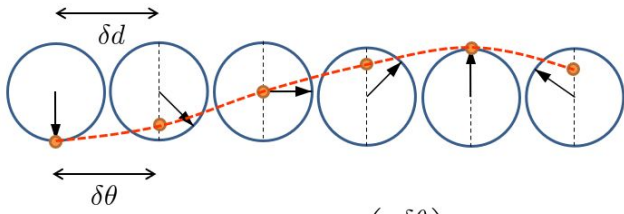


図 10A.1 各スピン間で歳差運動の位相が δ だけ異なっている場合の模式図.

10A.1 磁化の集団運動

全磁化

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i \quad (10A.1)$$

に対して, Heisenberg 運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = [\mathbf{S}, \mathcal{H}] \quad (10A.2)$$

を考えると, これは式 (2.11) と形式的に同じであり, ラーモア歳差運動を表している. 全磁化ベクトルについて, EPR の項で見たような共鳴実験を行うことができ, **強磁性共鳴** (ferromagnetic resonance, FMR) と呼ばれている. FMR からは, 強磁性やスピン波などに関する様々な情報を得ることができる.

次に, スピンの歳差運動の位相が, 少しずつシフトしているものを考えよう. 上の全磁化の運動は, この運動の長波長極限と考えることもできる. 強磁性磁化と外部磁場の向きを z に取り,

$$S_{ix} = A \cos(\omega_0 t + \theta_i), \quad S_{iy} = A \sin(\omega_0 t + \theta_i) \quad (10A.3)$$

として, θ_i が i に対してシフトしていく状況を考える. これを扱う際に, 複素数とした方が便利である. その上で, Fourier 変換, 逆変換

$$S_{qx} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j S_{jz} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j), \quad S_{jx} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} S_{qx} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (10A.4)$$

を導入する.

Heisenberg Hamiltonian $\mathcal{H} = -2J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j$ に (10A.2) を使用することで, 次が得られる.

$$i\hbar \frac{\partial S_{qx}}{\partial t} = \frac{4i}{\sqrt{N}} J \sum_{\langle i,j \rangle} S_{iy} S_{jz} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i) \{1 - \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]\} \quad (10A.5a)$$

$$i\hbar \frac{\partial S_{qy}}{\partial t} = -\frac{4i}{\sqrt{N}} J \sum_{\langle i,j \rangle} S_{ix} S_{jz} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i) \{1 - \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]\}. \quad (10A.5b)$$

J の Fourier 変換を

$$J_{\mathbf{q}} = \sum_j J \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \quad (10A.6)$$

とする. 上記で相互作用は $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ にのみ依存するとして, i は適当に取り, j についての和を考えればよい. 更に, 上では最近接相互作用のみ考えていたので, 最近接の和のみ取ることになる. ここで, スピンの z 軸からの傾きが小さいとして, 上の 2 式で S_{jz} を S とする. すると,

$$\hbar \frac{\partial S_{qx}}{\partial t} = 2[J_0 - J_{\mathbf{q}}] S S_{qy}, \quad (10A.7a)$$

$$\hbar \frac{\partial S_{qy}}{\partial t} = -2[J_0 - J_{\mathbf{q}}] S S_{qx}. \quad (10A.7b)$$

これはもちろん, 式 (5.68) (の $B = 0$ としたもの) に他ならない.

付録 10B：ボース・アインシュタイン凝縮

Bose-Einstein Condensation (BEC)^{*1}: 自由度間の相互作用によらない相転移 (量子統計力学的相転移) と呼ばれている。

相互作用による相転移は直感的にわかり易い面があるが、相転移は必ずしも相互作用を要するものではなく、様々な要因のせめぎ合いによって「相」の変化が起こることがある。その代表が BEC である。

ボース系の場合、粒子間の力に相当する相互作用は存在しないにもかかわらず、その統計的な性質から同じ状態にできるだけ多数の同種粒子が入ろう、とする傾向が生じる。2 粒子の場合について考えてみよう。2 粒子系の場合波動方程式の解を $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ とすると、系の波動関数 $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)] \quad (10B.1)$$

と対称化される。したがって、 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ が得られる確率は

$$|\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = \frac{1}{2} [|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)|^2 + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^* \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)^*] \quad (10B.2)$$

となって、 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ という条件に対して、後半の 2 つの干渉項が強調する効果を持つことがわかる。低温で $\lambda \sim l$ となったとき、結局この傾向を満足するためには $k = 0$ の状態に粒子が入り込む必要があることから BEC が発生する。

$$E_k = \frac{p^2}{2M} = k_B T : \text{Bose 統計}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &\sim \sqrt{M k_B T} \\ \therefore \lambda &= \frac{h}{\Delta p} \sim \frac{h}{\sqrt{M k_B T}} \end{aligned} \quad (10B.3)$$

すなわち、温度が下がると系を代表するドブロイ (de Brogli) 波長は \sqrt{T} に反比例して長くなる。波動関数の空間的なオーバーラップが大きくなると、同種粒子はお互いに区別がつかなくなり、全系の波動関数は粒子の交換に対して対称 (Boson) になる。結果、ある温度を境として、位相空間 (\mathbf{r}, \mathbf{p}) 内での凝縮が起こる。これが BEC である。

10B.1 理想気体のボース・アインシュタイン凝縮

spin 0 の理想 Bose 気体を考える。Bose 分布

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} \quad (\beta \equiv (k_B T)^{-1}) \quad (10B.4)$$

で、 $\mu = 0$ を次のように定義しよう。 $T = 0$ では (10B.4) より基底状態にすべての粒子が落ち込む。そこで、

$$\mu(T = 0) = 0 \quad (10B.5)$$

とする。有限温度では、系の粒子数を N とすると、

$$N = \sum_i f(\epsilon_i)$$

であるから、

$$N \rightarrow \int f(\epsilon) \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon \quad (?)$$

^{*1} BEC という略記は、Bose-Einstein Condensation と Bose-Einstein Condensate (ボース・アインシュタイン凝縮体) の両方に使われる。紛らわしいようだが、使ってみるとそれ程混乱することはない。

としたいところである。この時、基底状態の粒子数 N_0 は

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\mu\beta} - 1} \sim \frac{1}{-\mu\beta} = -\frac{k_B T}{\mu} \rightarrow \mu \sim -\frac{k_B T}{N_0} \quad (10B.6)$$

となるはずである。この線に沿って計算すると、3次元理想気体では、

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{より} \quad \mathcal{D}(\epsilon) = \frac{m^{3/2} V}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sqrt{\epsilon} \quad (10B.7)$$

であるから、

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon = \frac{(m k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} V \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\alpha} - 1} dx \quad (10B.8)$$

である。ただし、 $x \equiv \epsilon\beta$, $\alpha \equiv \mu\beta$ とした。ここで、定積分の部分を $I(\alpha)$ と書くことにすると、 I は

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sim 2.6 \quad (10B.9)$$

で、 $\alpha < 0$ に対して、 α の絶対値が大きくなると減少する関数である。したがって、 $T \rightarrow 0$ で (10B.8) の N のとり得る最大値はどんどん小さくなってしまい、数え落としているものがあるのは明らかである。もちろん、これが基底状態に落ち込むマクロな粒子数である。

(10B.8) から

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}{(m k_B T)^{3/2}} \frac{N}{V}$$

であるから、これが、(10B.9) を超える低温で異常（基底状態の粒子数増加）が起こる。この臨界温度 T_c は

$$T < T_c \equiv \frac{2\pi \hbar^2}{m k_B} \left[\frac{N}{\zeta(3/2)V} \right]^{2/3} \quad (10B.10)$$

と見積もられる。

ここで、 $l \equiv (V/N)^{1/3}$ は粒子間の平均距離であるから、(10B.10) は数係数を無視すると、

$$l = \frac{\hbar}{\zeta(3/2) \sqrt{2\pi m k_B T_c}} \sim \lambda(T = T_c) \quad (10B.11)$$

である。すなわち、Bose-Einstein 凝縮は、平均の de Broglie 波長が粒子の平均間隔程度になった時に起こることがわかる。

T_c 以下では、基底状態の粒子数 N_0 を入れて

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon + N_0 \quad (10B.12)$$

とする。(10B.6) より、 $T < T_c$ では N_0 がマクロな数となるため $\mu = 0$ である。したがって、

$$N_0 = N - \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\epsilon\beta} - 1} d\epsilon = N \left[1 - \frac{V}{N} \frac{(m k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} I(0) \right] = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \quad (10B.13)$$

ちょうど、強磁性転移で転移点以下で自発磁化が急速に有限の値を獲得するのと同じである。

$T < T_c$ で系の全エネルギーを計算する。

$$E = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (10B.14)$$

$$\text{ここで } T < T_c \text{ では } \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \text{ より}$$

$$E = \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} V (k_B T)^{5/2} \quad (10B.15)$$

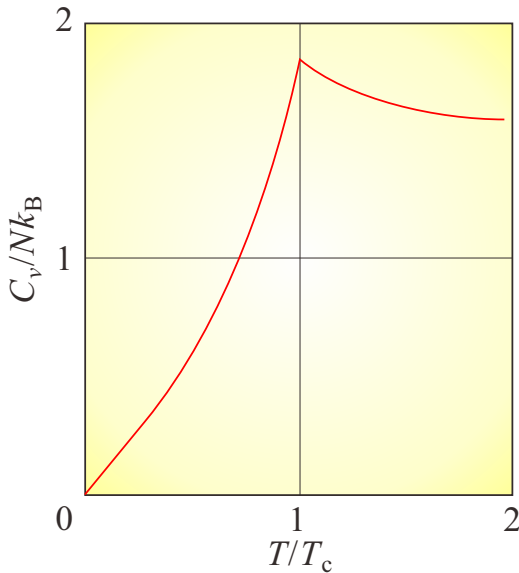


図 10B.1 理想ボース気体の定積比熱の温度依存性. T_c はボース・アインシュタイン凝縮の転移温度.

これより、定積熱容量は

$$C_v = \frac{15}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} V k_B^{5/2} T^{3/2} \quad (10B.16)$$

となる.

C_v は T_c でカuspを示し、これが相転移であることを示している.

10B.2 ボース誘導

すでに、??節で2粒子について述べたことと本質的に同じであるが、BEC やレーザー発振などで、あたかも「駆動力」のような役割を果たしている**ボース誘導 (bosonic stimulation)** について、 N 粒子について見ておこう. ボース粒子系で、1粒子状態 φ_{ini} にある粒子が摂動を受けて別の1粒子状態 φ_{fin} に遷移する過程を考える. φ_{fin} がすでに N 個の粒子で占有されている場合、遷移確率は φ_{fin} がまったく空の場合に比べてどうなるか、が問題である. 始状態を

$$\psi_+^{(i)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N+1}) = \frac{1}{\sqrt{(N+1)N! \prod_l n_l!}} \prod_{m=1}^N \hat{R}_{m,N+1} \det^{(+)}\{\varphi_i(\mathbf{r}_j)\} \varphi_{\text{ini}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (10B.17)$$

と表す. $\det^{(+)}$ は、行列式の各項の符号をすべて + にしたもので、パーマネントと呼ばれる. 終状態 $\psi_+^{(f)}$ は φ_{ini} を φ_{fin} と交換することで得られる. 摂動ハミルトニアン \hat{H}_1 の行列要素を $\langle \varphi_{\text{fin}} | \hat{H}_1 | \varphi_{\text{ini}} \rangle = a$ とする.

$\varphi_i (i \leq N)$ が φ_{fin} と直交しているとする. $\langle \psi_+^{(f)} | \hat{H}_1 | \psi_+^{(i)} \rangle$ の中で、ゼロでない、 a を与える項は $(N+1)N! \prod_l n_l!$ 個である. これは、規格化定数分母の2乗と同じで、結局 $\langle \psi_+^{(f)} | \hat{H}_1 | \psi_+^{(i)} \rangle = a$ となる.

一方、 $\varphi_i (i \leq N)$ がすべて φ_{fin} であるとする.

$$\psi_+^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{(N+1)}} \prod_{m=1}^N \hat{R}_{m,N+1} \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N) \varphi_{\text{ini}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (10B.18)$$

と書ける. $\det^{(+)}$ の $N!$ 個の項がすべて $\varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N)$ となり、規格化定数分母の $N!$ と割り切れている. これに対して終状態は

$$\psi_+^{(f)} = \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N) \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (10B.19)$$

であるから、 $\langle \varphi_{\text{fin}} | \hat{H}_1 | \varphi_{\text{ini}} \rangle = a\sqrt{N+1}$ となり、フェルミの黄金則より、遷移確率は $N+1$ 倍であることが示された.

参考文献

- [1] 高橋康. 物性研究者のための場の量子論 1 (新物理学シリーズ 16). 培風館, 10 1974.
- [2] Silvia Viola Kusminskiy. *Quantum Magnetism, Spin Waves, and Optical Cavities (SpringerBriefs in Physics)*. Springer, 2 2019.
- [3] Ryogo Kubo. The spin-wave theory of antiferromagnetics. *Phys. Rev.*, Vol. 87, pp. 568–580, Aug 1952.
- [4] Shuhei Fukuoka, Satoshi Yamashita, Yasuhiro Nakazawa, Takashi Yamamoto, Hideki Fujiwara, Takashi Shirahata, and Kazuko Takahashi. Thermodynamic properties of antiferromagnetic ordered states of $\pi - d$ interacting systems of $\kappa - (\text{BETS})_2\text{FeX}_4$ ($x = \text{Br}, \text{Cl}$). *Phys. Rev. B*, Vol. 93, p. 245136, Jun 2016.
- [5] H.B. Nielsen and S. Chadha. On how to count goldstone bosons. *Nuclear Physics B*, Vol. 105, No. 3, pp. 445–453, March 1976.
- [6] PHILIP W. ANDERSON. *BASIC NOTIONS OF CONDENSED MATTER PHYSIC*. TAYLOR & FRANCIS, 2 2019.
- [7] Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama. Unified description of nambu-goldstone bosons without lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 108, p. 251602, Jun 2012.
- [8] Yoshimasa Hidaka. Counting rule for nambu-goldstone modes in nonrelativistic systems. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 110, p. 091601, Feb 2013.
- [9] Yoshimasa Hidaka and Yuki Minami. Spontaneous symmetry breaking and nambu-goldstone modes in open classical and quantum systems. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2020, No. 3, March 2020.
- [10] H.Y. Yuan, Yunshan Cao, Akashdeep Kamra, Rembert A. Duine, and Peng Yan. Quantum magnonics: When magnon spintronics meets quantum information science. *Physics Reports*, Vol. 965, pp. 1–74, June 2022.
- [11] Philipp Pirro, Vitaliy I. Vasyuchka, Alexander A. Serga, and Burkard Hillebrands. Advances in coherent magnonics. *Nature Reviews Materials*, Vol. 6, No. 12, pp. 1114–1135, July 2021.
- [12] Sergio M. Rezende. *Fundamentals of Magnonics (Lecture Notes in Physics)*. Springer, 8 2020.
- [13] G. G. Low, A. Okazaki, R. W. H. Stevenson, and K. C. Turberfield. A measurement of spin-wave dispersion in MnF_2 at 4.2 k. *Journal of Applied Physics*, Vol. 35, No. 3, pp. 998–999, March 1964.
- [14] 高橋康. 物性研究者のための場の量子論 2 (新物理学シリーズ 17). 培風館, 4 1976.
- [15] S. O. Demokritov, V. E. Demidov, O. Dzyapko, G. A. Melkov, A. A. Serga, B. Hillebrands, and A. N. Slavin. Bose-einstein condensation of quasi-equilibrium magnons at room temperature under pumping. *Nature*, Vol. 443, No. 7110, pp. 430–433, September 2006.
- [16] T. Nikuni, M. Oshikawa, A. Oosawa, and H. Tanaka. Bose-einstein condensation of dilute magnons in tlcucl_3 . *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, pp. 5868–5871, Jun 2000.
- [17] Hidekazu Tanaka, Akira Oosawa, Tetsuya Kato, Hidehiro Uekusa, Yuji Ohashi, Kazuhisa Kakurai, and Andreas Hoser. Observation of field-induced transverse néel ordering in the spin gap system TlCuCl_3 . *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 70, No. 4, pp. 939–942, April 2001.
- [18] Masashi Tachiki and Takemi Yamada. Spin ordering and thermodynamical properties in spin-pair systems under magnetic fields. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Vol. 46, pp. 291–309, 1970.