

講義ノート 磁性 第11回

2022年6月22日 勝本信吾 東京大学物性研究所 (理学系研究科物理学専攻)

前回、やや特殊な物質^{*1}での熱平衡状態のマグノン BEC について紹介した。その際にちょっと触れた、準平衡状態での BEC 実験についても見ておこう。

手法としては、図 5.11 の左パネルのように、YIG 薄膜にマイクロ波パルスを印可し、パラメトリック励起を通して低エネルギーのマグノン (~ 100 mK) を特異的に励起する [1]。マイクロ波 (光子) は運動量が極めて小さく、1 個のマグノンを励起するのは困難であるが、挿入図のように、正負でほぼ同じ大きさの運動量を持つマグノン 2 個の励起は可能である。従って印可したマイクロ波のエネルギーの半分程度のエネルギーのマグノンが励起される。マグノンの密度とエネルギー分布は、レーザーのブリュアン散乱分光を用いて調べる。図 5.11 の右パネルがその結果で、励起マイクロ波のパワーを 4 W から 5.9 W に上昇すると、マイクロ波パルスを切った後のマグノンの数が急激に増え、エネルギー分布の幅が狭くなっていることがわかる。(d) にエネルギー分解能を上げて測定した結果が示され、極めて狭い分布が実現していることがわかる。これをもって、BEC を観測した、としている。

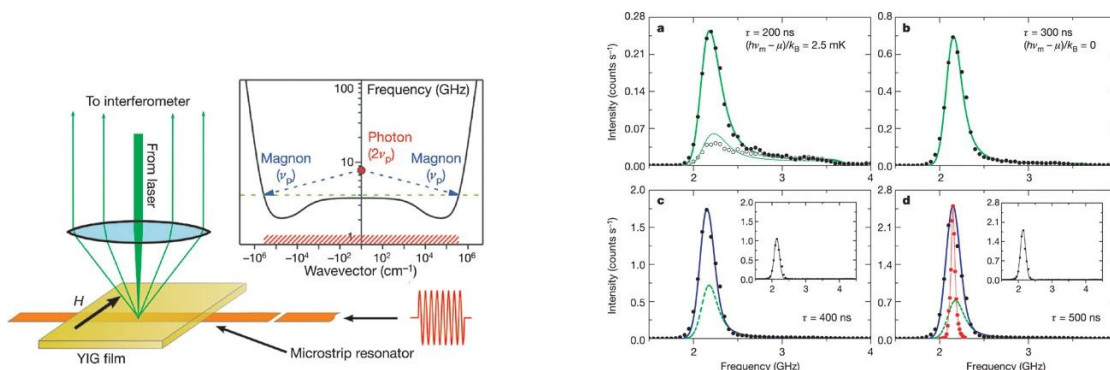


図 5.11 左：準平衡状態でマグノンの BEC を観測する実験のセットアップ。ストリップラインを通してマイクロ波を印可し、挿入図に示したパラメトリック過程を用いて低エネルギーマグノンを大量に励起する。ブリュアン散乱を通してマグノンの分布を調べるためのレーザー光を印可する。右：マイクロ波パルスを印可後のマグノンの分布をブリュアン散乱スペクトルで調べたもの。パルス後の待機時間による分布の変化。黒丸は励起マイクロ波のパワー 5.9 W、白抜き丸は 4 W の場合である。

5.9.3 強磁性 (反強磁性) 共鳴

付録 10A.1 でも述べた通り、**強磁性共鳴** (ferromagnetic resonance, FMR) は、マクロな磁化がラーモア歳差運動をすることによる共鳴吸収である。マグノンの長波長極限と考えることもできる。このような磁気秩序のある系での共鳴現象では、第 1 回の講義で問題にしたような、実験状況を反映した反磁場などの効果を考える必要がある。そこで、系の自由エネルギー \mathcal{F} を

$$\mathcal{F} = \sum_{\langle i,j \rangle} \lambda_{ij} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j - \sum_{i,j} \mathbf{M}_i \mathbf{K}_{i,j} \mathbf{M}_j - \sum_i \mathbf{M}_i \cdot \left(\mathbf{H} - \mathbf{N} \sum_j \mathbf{M}_j \right), \quad (5.103a)$$

$$= -\lambda M^2 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{K} \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{N} \mathbf{M}) \quad (5.103b)$$

^{*1} ダイマー磁性自身は比較的良くあるものであるが、スピギャップが閉じる臨界磁場が高いことが多く、実験が難しいことが多い。

と書きおろす。外部磁場 \mathbf{H} は、本講義では通常実験で専ら使用する \mathbf{B} を使っているが、ここは磁性体中であることから、混乱を避けるため \mathbf{H} を使用している。(5.103a) は、一般のサイト依存磁化の場合、(5.103b) は強磁性秩序が生じて、マクロ磁化で全体が代表できる場合である。(5.103a) 右辺第一項は、交換相互作用による項、第二項は磁気異方性による項、第三項がゼーマンエネルギー項である。ただし、強磁性体の場合磁性体内部の磁場には、1.2.2 節で見たように試料形状に依存して大きな反磁場が生じる可能性がある。これが、 \mathbf{N} (テンソル) の項である。以上より、 \mathbf{M} に働く (\mathbf{H} 以外の) 有効磁場は

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \lambda \mathbf{M} - (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{M} \quad (5.104)$$

である。この内、 $\lambda \mathbf{M}$ は常に \mathbf{M} に平行で、運動方程式に入れても結局影響がないため、最初から落とす。以上から、運動方程式が磁気回転比を γ として、

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times (\mathbf{H} - \mathbf{K}\mathbf{M} - \mathbf{N}\mathbf{M}) \quad (5.105)$$

と得られる。一般に大変面倒な形になるが、試料形状に例えば楕円体のように「主軸」のような回転対称軸があり、結晶の磁化容易軸と同一方向に取り、更に磁場を z 軸にとると、共鳴振動数 ω は

$$\omega = \gamma \sqrt{(H + (K_x - K_z + N_x - N_z)M)(H + (K_y - K_z + N_y - N_z)M)} \quad (5.106)$$

と得られる。

反強磁性・フェリ磁性の場合も同様なマクロ磁化のラーモア歳差運動の共鳴現象が生じる。これを扱うには、各磁気副格子の磁化 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ について*2、同様に共鳴条件を考える。 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ に対する有効磁場 $\mathbf{H}_{\text{eff}1}, \mathbf{H}_{\text{eff}2}$ は、

$$\mathbf{H}_{\text{eff}1} = -\lambda \mathbf{M}_2 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{M}_2 + \mathbf{N}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \quad (5.107a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{eff}2} = -\lambda \mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{M}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{M}_2 + \mathbf{N}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \quad (5.107b)$$

となる。

反強磁性の場合、 $\mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2$ とすれば、(5.107) の 2 式の右辺最終項は消え、また、異方性テンソルは

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22}, \quad \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} \quad (5.108)$$

である。異方性エネルギー \mathcal{F}_A が、一軸性であるとする、その主軸と $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ のなす角を θ_1, θ_2 として、

$$\mathcal{F}_A = -\frac{K_1}{2}(\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2). \quad (5.109)$$

また、異方性テンソルは、主軸方向を z として、

$$K_{zz} = -\frac{K_1}{|\mathbf{M}_1|}, \quad (\text{others}) = 0 \quad (5.110)$$

である。共鳴条件は、次で与えられる [2].

$$\frac{\omega_{\pm}}{\gamma} = \sqrt{2\lambda K_1 + (K_1/|\mathbf{M}_1|)^2} \pm H, \quad H \leq H_c, \quad (5.111a)$$

$$\frac{\omega_{\pm}}{\gamma} = \sqrt{B^2 - 2\lambda K_1} \quad H > H_c. \quad (5.111b)$$

ここで、 $H_c = \sqrt{2\lambda K_1}$ は、スピンフロップ転移の臨界磁場である。異方性磁場 $K_1/|\mathbf{M}_1|$ が交換相互作用磁場 $\lambda|\mathbf{M}_1|$ に対して無視できれば、

$$\frac{\omega_{\pm}}{\gamma} = \sqrt{2\lambda K_1} \pm H, \quad H \leq H_c \quad (5.112)$$

と書ける。フェリ磁性の場合、反強磁性のような簡単化がないため、結果は複雑になる。必要な方は、[3, 4] を参照の事。

*2 これまでと書法を同じにするには、 $\mathbf{M}_A, \mathbf{M}_B$ とすべきであるが、添え字が見にくくなるため、以下しばらく 1, 2 を使用する。

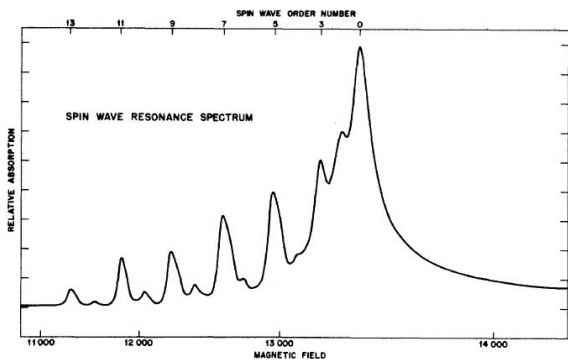


図 5.12 膜厚 560 nm のパーマロイ薄膜で観測された、スピン波共鳴 (Walker モード). 横軸は磁場 (単位は Oe). 縦軸は、8.89 GHz のマイクロ波吸収強度. この実験では、境界条件により、式 (5.114) で、 $n=7$ から 13 の奇数モードが観測されている (それより高磁場にも吸収線はあるが、良く合わないせいかカウントされていない. [5] より).

5.9.4 スピン波共鳴

以上は、試料全体の磁化の歳差運動、長波長極限での共鳴であった. 試料が薄膜構造で、一方向に非常に薄くなっている場合、波長がやや短くなったところで、薄膜方向に定在波が立つことが考えられる. 定在波化によってマグノンのスペクトルは、閉じ込め方向については離散化する. このような領域のマグノンモードは **Walker モード**とも呼ばれている^{*3}. 5.8.2, 5.8.3 節で考えた最も単純なスピン波の分散関係 (5.81) より、

$$\omega_k = \gamma H + \frac{2SJ}{\hbar} (ka)^2 \quad (5.113)$$

である. 磁気回転比 γ は H に合わせて適宜定義変更する.

今、表面に強い磁気異方性があるためそのみスピンが固定されている (共鳴周波数が高い) とすると、表面がマグノンの節になるという境界条件から、膜厚を L とすると、

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.114)$$

という離散的なモードが現れる [6]. 薄膜で、異方性の軸が垂直に向いているような、比較的単純な場合は、膜厚を変化させて離散モードを調べることで、様々な情報を得ることができる. これを **スピン波共鳴** (spin wave resonance), **マグノン共鳴** (magnon resonance) などと称する. スペクトルの一例を図 5.12 に示す. 発案・発見当時としては、交換相互作用係数 J を直接求める方法として盛んに使用された.

近年のナノサイズ磁性体においては、閉じ込めの次元や形状も様々になり、磁気異方性などの影響もあって解析は難しく、数値計算に頼らざるを得ない場合もある [7].

強磁性関係の共鳴におけるマクロ磁化の歳差運動は、マグノンが一つの状態に凝縮しているものと見ることができ、ボソンだから可能な状態である、ということもできる. もちろん、ボソン系が自発的にゲージ対称性を破って凝縮する BEC とは、現象としては全く異なる. 一方、本来多自由度であったものが、その生成過程はともあれ一つの量子状態を多数が占めるようになり、全体としては古典的な波動のように振舞うという点では、類似状態と言って差し支えない. これは、例えば、我々が日常的に通信に利用している電磁波とも同じである. これらの電磁波は古典波動として全く差し支えないものの、量子力学的に見れば、多数の光子が一つの量子状態を占め、(光子数不定の) コヒーレント状態になっているものと見ることがができる. このことは、古くから量子力学の紹介書などで指摘されてきた [8]. 従って、このように凝縮したマグノンが室温でも非平衡な手法で作られ、干渉効果などを生じても、それ自身は特に驚くには足りない. 一方、マクロ磁化のトンネル現象や、フォトンなどとの量子的な結合 (量子もつれ) など、マグノンを舞台にした量子現象も生じる. これらの現象を調べる際には、一体何を見ているのか、良く考える必要がある.

講義では、ボソン凝縮による古典波動の実験などを紹介する.

^{*3} 波動方程式が Walker 方程式 (Walker は人名) の形になるため.

5.10 繰り込み群と相転移のスケーリング論

マグノンの項に思わぬ時間を使ったが、相転移の一般的な話に戻ろう。磁性は、相転移において大変重要な概念であるスケーリングを直観的に理解するにも格好の課題である。

物理学全体にとって大きなテーマである繰り込み群については、膨大な数のレビュー論文、書籍が発行されているが、この問題に関心を持つ人が読むべきものとして、何とんでもこの分野のバイブル的レビュー [9] を挙げておかなければならない。この論文の題目にもあるように、繰り込み群理論が展開される元来の動機は希薄磁性合金で発見された近藤効果、そして近藤の理論から提起された近藤問題 (これも物理学全体にとって大きなテーマである) である。そのような意味でも、磁性とは密接に関わる概念である。教科書としては、基礎的な部分については [10, 11], 専門とされる場合には [12] *4 をお勧めする。ネットの解説では [13] が丁寧でわかりやすい。講義では、超ダイジェスト版でお届けする。

5.10.1 相関関数

このために大切な概念が、相関関数である。これまで理論的に考えてきた磁性相転移では、磁化は空間的に一様で、揺らぎとして考えたマグノンも空間的な振幅は一様であった。しかし、実際には、Ising 模型数値計算の動画で見たように、温度を低下させていくと、スピン配列が局所的に発生し (スピנקラスタ), そのサイズは転移点に接近するにつれて次第に成長する。これを空間的なゆらぎとして Fourier 空間で考えれば、揺らぎの特徵的波長が大きくなり、転移点で発散するような振舞いをするはずである。

これを以下のように取り扱おう。局所磁化 m が全空間で一様ではなく、 $m(\mathbf{r})$ のように緩やかに変化してるとし、 m を局所的な秩序変数 (order parameter) と考える。この時、5.2.1 節と同じ議論により、空間座標 \mathbf{r} 近傍での体積当たりの自由エネルギー f は、

$$f(m(\mathbf{r}), \nabla m(\mathbf{r})) = f_0 + \frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 + c|\nabla m|^2 - hm \quad (5.115)$$

のように書かれる。右辺で引数の \mathbf{r} は記入省略した。局所磁場を h とした。自由エネルギー \mathcal{F} は汎関数表現を使って

$$\mathcal{F}\{m(\mathbf{r})\} = \int_V d\mathbf{r}' f(m(\mathbf{r}'), \nabla' m(\mathbf{r}')) \quad (5.116)$$

と表される。系の分配関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}m(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{\mathcal{F}\{m(\mathbf{r})\}}{k_B T} \right] \quad (5.117)$$

と書かれる。ここで、 $\mathcal{D}m(\mathbf{r})$ は、汎関数積分と呼ばれるもので、あらゆる $m(\mathbf{r})$ について和を取ることを意味する。Feynman の経路積分でお馴染みの考え方である [14, 15]。磁化分布 $m(\mathbf{r})$ が実現する確率は、

$$p\{m(\mathbf{r})\} = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{\mathcal{F}\{m(\mathbf{r})\}}{k_B T} \right] \quad (5.118)$$

であるから、物理量 A の統計的平均値は

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}m(\mathbf{r}) A \exp \left[-\frac{\mathcal{F}\{m(\mathbf{r})\}}{k_B T} \right] \quad (5.119)$$

で与えられる。

ここで、式 (5.16) と同様に、式 (5.115) の a , b の温度依存性を

$$a = \alpha(T - T_C) \quad (\alpha > 0), \quad b = \text{const.} (> 0) \quad (5.120)$$

*4 特に問題を解くこと。講師の素粒子論の友人はこれをすべて解いていた。講師も多少挑戦したが、中々歯が立たない。

と仮定する。また、 c も一定と仮定する。秩序変数のゆらぎの相関関数 (correlation function) を

$$g(\mathbf{r}) = \langle (m(0) - \langle m(0) \rangle)(m(\mathbf{r}) - \langle m(\mathbf{r}) \rangle) \rangle = \langle m(0)m(\mathbf{r}) \rangle - \langle m(0) \rangle \langle m(\mathbf{r}) \rangle \quad (5.121)$$

と書く。 $T > T_C$ では第 2 項はゼロである。 $m(\mathbf{r})$ の Fourier 表示を

$$m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.122)$$

とする (V は系の体積) と、 $m(\mathbf{r})$ が実数であることから、 $m_{-\mathbf{k}} = m_{\mathbf{k}}^*$ でなければならない。 $\langle m(0)m(\mathbf{r}) \rangle$ 中で $\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ の項が

$$(m_{\mathbf{k}} + m_{-\mathbf{k}})(m_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + m_{-\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = 2|m_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + 2|m_{-\mathbf{k}}|^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

と書けること、また系が並進対称であること、から、次のように書ける。

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle |m_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (5.123)$$

この時、

$$\mathcal{F} = V f_0 + \sum_{\mathbf{k}} |m_{\mathbf{k}}|^2 \left(\frac{a}{2} + ck^2 \right) + \frac{b}{4V} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{0}} m_{\mathbf{k}_1} m_{\mathbf{k}_2} m_{\mathbf{k}_3} m_{\mathbf{k}_4} \quad (5.124)$$

である。ゼロ磁場極限で $h \rightarrow 0$ とした。 $T > T_C$ で、(5.124) の最後の 4 次項を無視する。重み付け関数 (5.118) は、(5.124) の第一項の定数項を除き、第二項を考えるとガウス分布

$$\frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{2}{k_B T} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{a}{2} + ck^2 \right) (m_{\mathbf{k}}^{(r)2} + m_{\mathbf{k}}^{(i)2}) \right] \quad (5.125)$$

となる。最後の括弧内は $|m_{\mathbf{k}}|^2$ の項を、実部、虚部に分けて

$$\text{Re}[m_{\mathbf{k}}] = m_{\mathbf{k}}^{(r)}, \quad \text{Im}[m_{\mathbf{k}}] = m_{\mathbf{k}}^{(i)}$$

と書いた。 $\sum'_{\mathbf{k}}$ となっているのは、独立な \mathbf{k} について和を取ることを表していて、(5.124) の和の中でこのようなものは全体の半分となるため、係数 2 をつけた。以上から

$$\langle |m_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{k_B T}{a + 2ck^2} \quad (5.126)$$

である。これを (5.123) に代入し、

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_B T}{a + 2ck^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = k_B T \int_0^\infty \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{2ck^2 + a} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{k_B T}{8\pi d} \frac{\exp(-r/\xi)}{r}, \quad \xi = \sqrt{\frac{2c}{a}} \quad (5.127)$$

が得られる。これは、 $T > T_C$ で、相関が距離と共に指数関数減衰することを示している。(5.127) の ξ を相関距離 (correlation length) と呼ぶ。これに、(5.120) の温度依存性を考えると、相関距離は T_C 近傍で $(T - T_C)^{1/2}$ となり、 T_C で発散し、 $g(r) \propto r^{-1}$ で減衰する形になる。

$T < T_C$ では秩序状態が現れ、式 (5.121) で表されるゆらぎの相関関数と、第 1 項のみ取った

$$\tilde{g}(\mathbf{r}) = \langle m(0)m(\mathbf{r}) \rangle \quad (5.128)$$

が一致しなくなり、 $\tilde{g}(\mathbf{r})$ は $r \rightarrow \infty$ で有限になる。これが、長距離秩序 (long range order) の出現を示す、とされている [16]。一方、ゆらぎの相関関数 $g(\mathbf{r})$ は、 $r \rightarrow \infty$ でゼロになる。

5.10.2 スケーリング関係式

臨界指数については、すでに、5.3 節において紹介した。スケーリング関係式を導入するにあたって、もう一度「お決まり」のノーテーションを見ておこう。有効パラメーター (温度) を $t \equiv (T - T_C)/T_C$ 、外場 (磁場) を h とする。臨界領域での振舞いは、

$$\begin{aligned} \text{Specific heat : } & C \sim |t|^{-\alpha}, \\ \text{Magnetization (order parameter) : } & m \sim |t|^\beta \quad (t < 0) \\ & m \sim h^{1/\delta} \quad (t = 0), \\ \text{Susceptibility : } & \chi \sim |t|^{-\gamma}, \\ \text{Correlation length : } & \xi \sim |t|^{-\nu} \end{aligned}$$

のように表される。このように、 $t = 0$ 、 $h = 0$ の臨界点で異常な振舞いが見られるが、これは、前副節で見た通り、系が臨界点に近づくとつれて、相関距離が長くなる、すなわち、短距離秩序を有する「クラスター」のサイズが大きくなることに由来している。ゆらぎの相関関数 (5.121) は、一般に系の次元を d として、

$$g(r) \sim \frac{\exp(-r/\xi)}{r^{d-2+\eta}} \quad (5.129)$$

と表される。 η も臨界指数の一種で、(5.127)(GL 理論) では $\eta = 0$ である。以上の臨界指数について、GL 理論では、

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = 1/2, \quad \eta = 0 \quad (5.130)$$

が得られる。GL 理論は、現象論的な近似理論であり、すでに見たように、臨界指数は実際には模型の詳細に依存して変化する。

さて、これら臨界指数の間には次の関係式が成立する。

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad (5.131a)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (5.131b)$$

$$\beta + \gamma = \beta\delta. \quad (5.131c)$$

特に、(5.131b)、(5.131c) はスケーリング関係式 (scaling relation) と呼ばれ、スケーリング仮説 (scaling ansatz) によって示すことができる。これは、転移の有効パラメーターとして、 t と h があつたが、実際には臨界点付近での系の振舞いが唯一のパラメーター $h/|t|^\Delta$ で決まる、というものである。 Δ はギャップ指数 (gap exponent) と呼ばれている。

自由エネルギー密度の異常部分 f_s が臨界点近くで、関数 $f_\pm(x)$ を使って

$$f_s \sim |t|^{2-\alpha} f_\pm \left(\frac{h}{|t|^\Delta} \right) \quad (5.132)$$

と書けるとする。 f_\pm の複号は、 $T \gtrless T_C$ に対応する。 $|t|^{2-\alpha}$ が付いているのは、比熱の指数を合わせるためである。この時、

$$m(h=0) \sim -\frac{\partial f_s}{\partial h} \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} f'_\pm(0) \sim |t|^\beta \quad (t < 0) \quad (5.133)$$

$$\chi \sim -\frac{\partial^2 f_s}{\partial h^2} \sim |t|^{2-\alpha-2\Delta} f''_\pm(0) \sim |t|^{-\gamma} \quad (5.134)$$

であるから、

$$\beta = 2 - \alpha - \Delta \quad (5.135)$$

$$-\gamma = 2 - \alpha - 2\Delta \quad (5.136)$$

より、

$$\Delta = \beta + \gamma \quad (5.137)$$

を消去することで、スケーリング関係式 (5.131b) が得られる。

$t = 0$ での磁化の振舞いを見るため、(5.133) で、 $h \neq 0$ の場合に $t \rightarrow 0$ の極限を調べようとする、 f'_{\pm} の引数 h/t^{Δ} が無限大になる。そこで、その漸近形を

$$f'_{\pm}(x) \sim x^{\lambda_{\pm}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (5.138)$$

と仮定しよう。上記スケーリング関係式により式 (5.133) は

$$m \sim |t|^{\beta} f'_{\pm} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta}} \right) \sim \frac{h^{\lambda_{\pm}}}{|t|^{\Delta\lambda_{\pm} - \beta}} \quad (5.139)$$

であるから、 $t \rightarrow 0$ で m が有限になるためには、

$$\lambda_{\pm} = \frac{\beta}{\Delta} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \quad (5.140)$$

である。この関係式と、臨界指数の関係式 $m \sim h^{1/\delta}$ より、

$$\delta = \frac{\beta + \gamma}{\beta} \quad (5.141)$$

で、(5.131c) が示された。更に、空間次元の d も加えた

$$2 - \alpha = d\nu \quad (5.142)$$

も成立し、ハイパースケーリング関係式 (hyperscaling relation) と呼ばれている。

5.10.3 繰り込み群

臨界点に接近すると、ゆらぎの相関長 ξ がどんどん長くなる。この相関長の中では秩序のようなものが成長している。 ξ より短い距離 x を取ると ($1 < x \ll \xi$)、距離 x の中では系は一様と考えられる。そこで、距離 x 内で物理量を平均し、 x を新しい距離の単位 (1) とする (粗視化, coarse graining)。この操作に伴い、相関長は ξ/x となって、短くなり、臨界点より「離れた」状態のように見える。系のパラメーターは、同様にこの操作によって様々に変更を受ける。この操作を、スケール因子 x の繰り込み変換 (renormalization transform) と呼ぶ。

このような変換を $\mathcal{R}(x)$ と表すと、例えば、Hamiltonian $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ の変換は、

$$\mathcal{H}' = \mathcal{R}(x)\mathcal{H} \quad (5.143)$$

のように書くことができる。スケール因子 x の変換に続けて x' の変換を行うことは、スケール因子 xx' の変換を行うことである。すなわち

$$\mathcal{R}(x')\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(x'x) \quad (5.144)$$

である。このように繰り込み変換は結合則を満たし、半群をなしているため、繰り込み群 (renormalization group) と呼ばれている。粗視化したものを逆に変換する逆変換が一般に存在しないため、「群」ではなく「半群」(semigroup) である。

図 5.13(a) の 2 次元正方格子 Ising 模型の例では、スピンを 4 つずつ平均化して

$$s_q = \frac{1}{4} \sum_i s_{qi} \quad (5.145)$$

という新しい格子 (図 5.13(b)) を考えている。スケール因子は $\sqrt{4} = 2$ である。平均化により、スピンは、 ± 1 以外の値を取り得るようになり、Ising 模型ではなくなる。また、相互作用のレンジも変更されてしまう。このように、繰り込み変換により、系は複数パラメーターによって指定される「系の空間」の中を流れていく。繰り込み変換により一般に不変なのは、秩序変数の対称性と空間の次元であり、「系の空間」はこれらにより特徴づけられる。

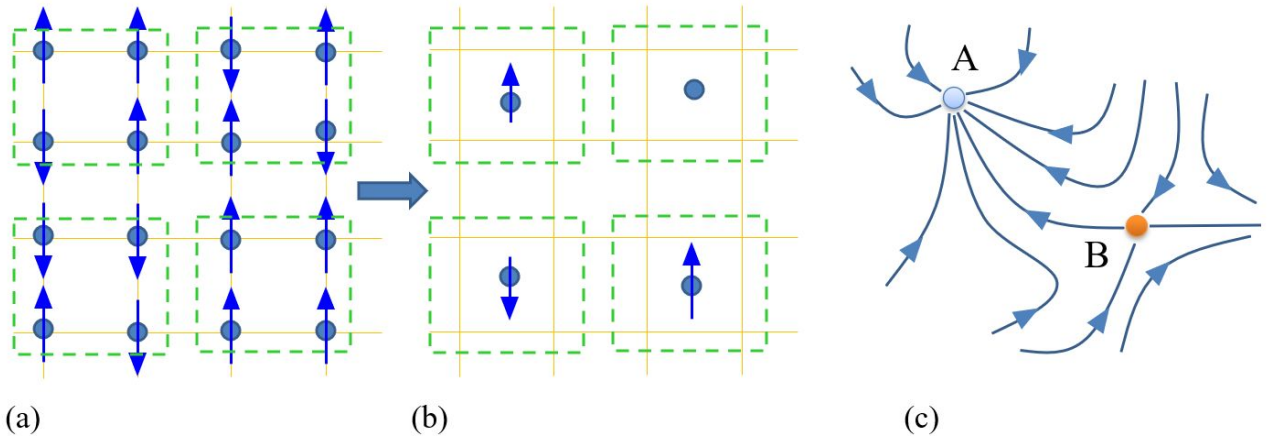


図 5.13 (a) 2次元正方格子 Ising 模型の模式図. (b) (a) で 4 つのスピンを平均化して 1 個のスピンの繰り込み変換の模式図. (c) 繰り込みの流れの模式図. A は安定固定点, B は不安定固定点.

スケール因子を連続変数とすると、「系の空間」中の遷移は連続的になる．繰り込み変換により系が連続的に遷移する様子を模式的に描いた例が、図 5.13(c) である．繰り込みの**流れ図** (flow diagram) と呼ばれる．繰り込み変換によって粗視化されることにより、変換のスタート時に臨界温度より高温にあった系は完全無秩序系に、低温にあった系は完全秩序系に遷移する．完全秩序系/無秩序系は、繰り込み変換に対して不変であり、図 5.13(c) にも示したような流れ図で動かない固定点になる．これらは安定固定点と呼ばれ、図 5.13(c) で A と表記したように、フローの線が集まる形になる．一方、臨界点でもゆらぎの相関長が発散するため、繰り込み変換を行っても変化しない固定点である．しかし、パラメーターが臨界点からわずかにずれてもフローは離れていくため、不安定固定点と呼ばれる．図 5.13(c) で B がそのような例である．

5.10.4 スケーリング仮説の導出

転移の有効パラメーターとして、これまで通り、 t (温度), h (磁場) を取る．スケール因子 x の繰り込み変換は、

$$t' = g_1^{(x)}(t, h) \quad (5.146a)$$

$$h' = g_2^{(x)}(t, h) \quad (5.146b)$$

と表される．これらを、固定点 (臨界点) $t = h = 0$ の周りで

$$\begin{aligned} t' &\simeq \Lambda_{11}(x)t + \Lambda_{21}(x)h, \\ h' &\simeq \Lambda_{21}(x)t + \Lambda_{22}(x)h \end{aligned} \quad (5.147)$$

としてみる． t は秩序変数の符号によらないが、 h は秩序変数の符号反転で反転するので、 t と h は線形の範囲では結合しない．すなわち、 $\Lambda_{12}(x) = \Lambda_{21}(x) = 0$ である．従って、(5.144) の結合則より、

$$(\Lambda_{11}(x))^n = \Lambda_{11}(x^n), \quad (\Lambda_{22}(x))^n = \Lambda_{22}(x^n) \quad (5.148)$$

である．これが、任意の $x (> 1)$, n (自然数) に対して成立しなければならない．従って、 $\Lambda_{11}(x)$, $\Lambda_{22}(x)$ は、 x のべき関数である．

$$\Lambda_{11}(x) = x^{\lambda_1}, \quad \Lambda_{22}(x) = x^{\lambda_2}. \quad (5.149)$$

今、スタート時点で (t, h) というパラメーターを持つ系にスケール因子 x の繰り込み変換を n 回繰り返し、結果の系の温度が $t_0 = x^{n\lambda_1}t$ で臨界点から十分離れているとする．ゆらぎの相関長は

$$\frac{\xi(t)}{\xi(t_0)} = x^n = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/\lambda_1} \quad (5.150)$$

であるから、相関長の臨界指数 $\xi \sim |t|^{-\nu}$ より、 $\nu = \lambda_1^{-1}$ である。

一方、 d 次元では、繰り込み変換により自由エネルギー密度 $f(t, h)$ は x^d 倍になる。従って、

$$x^{nd} f(t, h) = f(x^{n\lambda_1} t, x^{n\lambda_2} h) = f(t_0, (t/t_0)^{-\lambda_2/\lambda_1} h). \quad (5.151)$$

t_0 を定数とおけば、適当な関数 $f_{\pm}(x)$ を用いて、

$$f(t, h) = t^{d/\lambda_1} f_{\pm}(t^{-\lambda_2/\lambda_1} h) = t^{d\nu} f_{\pm}\left(\frac{h}{t^{\Delta}}\right) \quad \Delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (5.152)$$

これにより、スケーリング仮説が示された。

第6章

遍歴電子系の磁性



鉄やコバルト，ニッケルなど，比較的ありふれた金属の強磁性の発生機構は，これまで見てきたものとは大きく異なると考えられている。

参考文献

- [1] Evgeny Y. Tsymbal and Žutić Igor, editors. *Spintronics Handbook, Second Edition: Spin Transport and Magnetism: Volume One: Metallic Spintronics (Spintronics Handbook: Spin Transport and Magnetism Book 1) (English Edition)*. CRC Press, 5 2019.
- [2] T. Nagamiya, K. Yosida, and R. Kubo. Antiferromagnetism. *Advances in Physics*, Vol. 4, No. 13, pp. 1–112, January 1955. Over 100 pages review.
- [3] Roald K. Wangsness. Magnetic resonance in ferrimagnetics. *Phys. Rev.*, Vol. 93, pp. 68–71, Jan 1954.
- [4] Roald K. Wangsness. Ferrimagnetic resonance and some related effects. *American Journal of Physics*, Vol. 24, No. 2, pp. 60–66, February 1956.
- [5] M. H. Seavey and P. E. Tannenwald. Direct observation of spin-wave resonance. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 1, pp. 168–169, Sep 1958.
- [6] C. Kittel and Conyers Herring. Effect of exchange interaction on ferromagnetic microwave resonance absorption. *Phys. Rev.*, Vol. 77, pp. 725–726, Mar 1950.
- [7] Sergej O. Demokritov, editor. *Spin Wave Confinement: Propagating Waves, Second Edition (English Edition)*. Jenny Stanford Publishing, 9 2017.
- [8] 中嶋貞雄. 量子的世界 新版 UP 選書. 東京大学出版会, 2 1975.

- [9] Kenneth G. Wilson. The renormalization group: Critical phenomena and the kondo problem. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 47, pp. 773–840, Oct 1975.
- [10] 西森秀稔. 相転移・臨界現象の統計物理学 新物理学シリーズ. 培風館, 11 2005.
- [11] Hidetoshi Nishimori and Gerardo Ortiz. *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena (Oxford Graduate Texts) (English Edition)*. OUP Oxford, 12 2010.
- [12] Daniel J. Amit and Victor Martin-mayor. *Field Theory, the Renormalization Group, And Critical Phenomena: Graphs To Computers*. World Scientific Pub Co Inc, 6 2005.
- [13] 大谷聡. 統計力学 i –臨界現象と繰り込み群–, 2022. <http://aries.phys.cst.nihon-u.ac.jp/~ohya/stat-mech/main.pdf>.
- [14] Richard P. Feynman, Albert R. Hibbs, and Daniel F. Styer. *Quantum Mechanics and Path Integrals: Emended Edition (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 7 2010.
- [15] Richard P. Feynman. *Statistical Mechanics: A Set Of Lectures (Frontiers in Physics)*. CRC Press, 3 1998.
- [16] Tohru Koma and Hal Tasaki. Symmetry breaking and finite-size effects in quantum many-body systems. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 76, No. 3-4, pp. 745–803, August 1994.