

rf-SQUID の応答について

勝本信吾

2018年2月9日

この稿では、サイエンスキャンプの実験で質問の多かった rf-SQUID の応答について、簡単に定性的に説明をおきましょう。「簡単に定性的に」としつつ断りをつけたのは、後で述べるように、実際の系ではちょっと面倒な問題があり、定量的な議論をするのは可能ではありますが、実験の理解の上でそれほど意味があるとは思えませんので、「手をひらひらさせて」説明するに留めることにします。

まず、電磁気学で学んだと思いますが、インダクタンス L を持つコイル (導体リング) を磁束 Φ が貫いている時のコイル内磁気エネルギーは

$$E = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (1)$$

です。超伝導リングのように Φ が量子化すると、その磁気エネルギーも量子化することになります。

復習ですが、rf-SQUID のリングを貫く総磁束を Φ 、そのうち、外部から印可した磁場による磁束を Φ_{ext} とすると、

$$\Phi - LJ_c \sin\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = \Phi_{\text{ext}}, \quad (2)$$

のようになります。これを $\Phi_{\text{ext}} - \Phi$ 平面にプロットすると、図 1(a) のようになります。この図の見方ですが、現在の物理系の状況を考えると、横軸の Φ_{ext} が外部から制御可能なパラメーターです。そこで、外部磁場により Φ_{ext} を変化させてリング内の磁束変化を見ると、赤い線で示したように、不完全な量子化が生じていることがわかります。ところどころでジャンプアップしていますが、ここで、リング内の不完全ながら量子化した磁束の数が急激に変化しており、磁束は Josephson 接合を通過して外部から飛び込んで (1) の磁気エネルギーもジャンプアップしますが、その際、一部外部電磁場にエネルギーを散逸しており、そのせいで、外部磁場を下げても同じ Φ_{ext} 位置で磁束を放出す

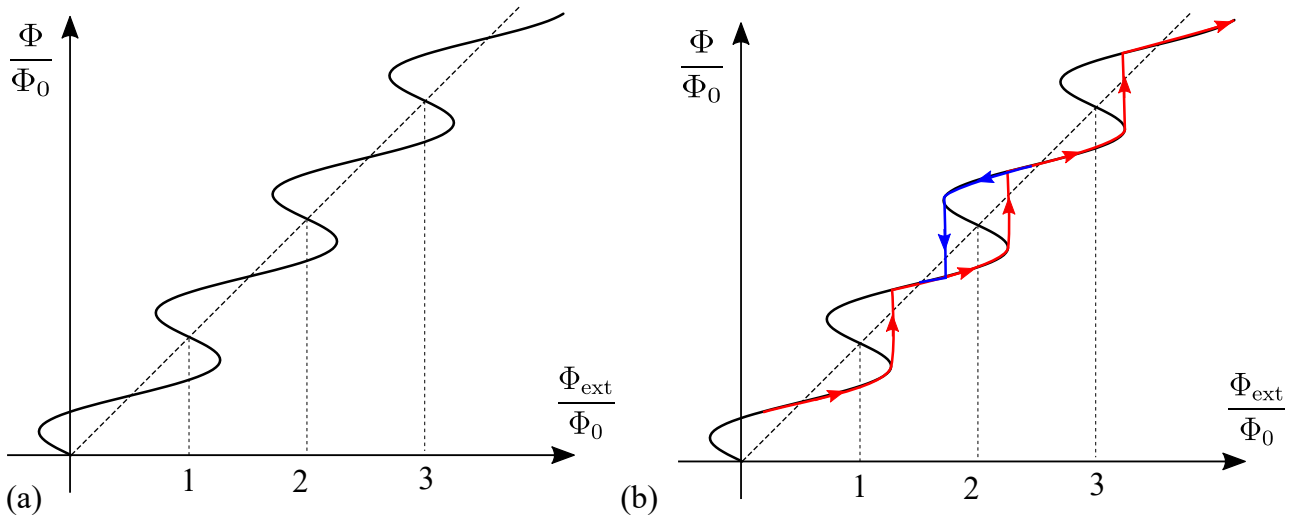


図 1 (a) 式 (2) を $\Phi_{\text{ext}} - \Phi$ 平面にプロットしたもの. (b) 外部磁場により Φ_{ext} を変化させてリング内の磁束変化を見ると、不完全な量子化が生じていることがわかる (赤い線). 青い線は量子磁束 2 本分付近で外部磁場変化の向きを変えて磁場を下げたときに、異なる磁場位置でリング内磁束数が変化し、履歴現象 (ヒステリシス) が生じることを示している.

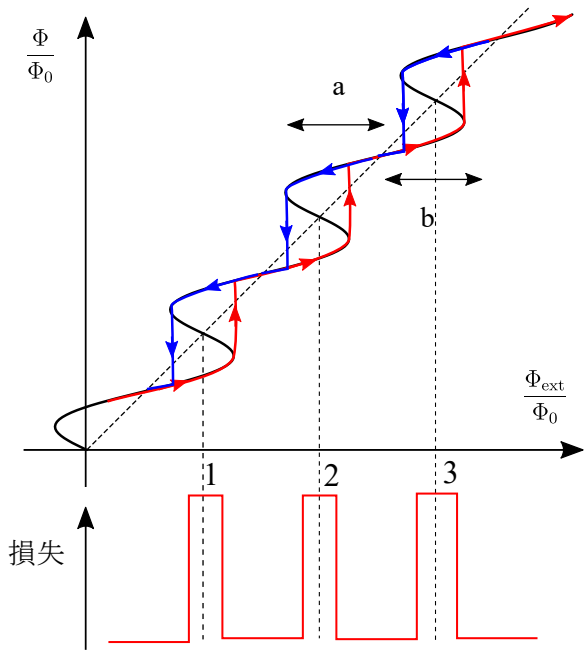


図2 外部磁場を一定振幅で振動させ、その中心を移動させていった時のエネルギー損失の変化 (下の赤い線で描かれたもの).

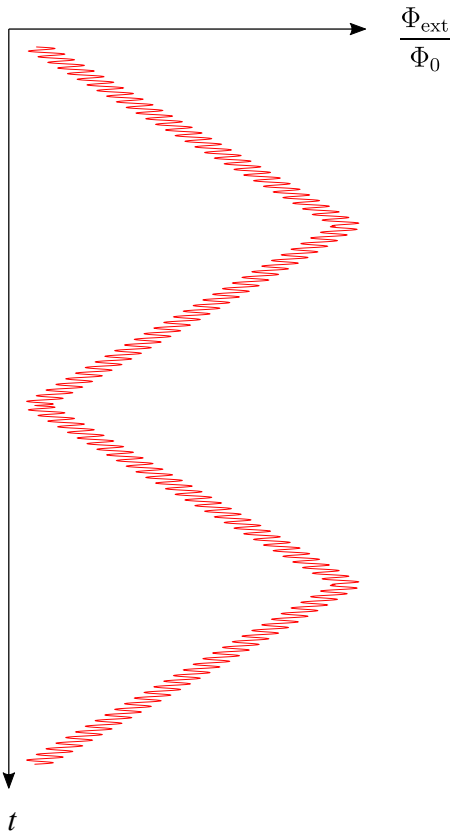


図3 図2の赤い線の振舞いを見るために、外部磁場を時間に対して図のように変化させる (実際の回路ではこのように設計しても SQUID の反作用のためにこうはなってくれない).

ることができず、放出には、より外部磁場を下げる必要があります、図中で青い線で示したように履歴現象 (ヒステリシス) が生じます。これは、(当然ですが) 外部電磁場に散逸したエネルギーを回収できず、エネルギー損失が出ていることを示します。

そこで、今、外部磁場を一定振幅で振動させてみましょう。図2の a の位置で、矢印で示したような振幅で振動させた場合、応答はヒステリシスを持たないので損失はありません。しかし、同じ振幅でも b の位置に来ると、応答にヒステリシスがありますので損失が生じます。振動の中心位置に対して損失をプロットすると、下に赤い線で示したように磁束量子周期で振動することがわかります。

このような実験系を電子回路で実装すれば、赤い線のような応答が得られるはずですが、実験でオシロスコープ上に現れた波形は、実際にこれを見たもので、三角波、あるいはサイン波になっていたのは回路的な事情によるものだと理解していただければ、「サイエンスキャンプ」のレベルでは十分だと思います。

「納得いかない」という人のために少しだけ続けます。実際の実験では、a, b のような磁場振動 (10 MHz 程度) をコイルで実現し、更に、そこにゆっくりした三角波形を加えて、以上のような系を実現しています。SQUID がコイルに入っていないければ、の話ですが、図 3 のようなコイル内磁場になるように回路を工夫します。

では、「エネルギー損失」はどのようにして計測しているのでしょうか。実は、外部磁場を与えているコイルはキャパシターと並列接続されていて、共鳴回路を構成しています。共鳴回路のエネルギーロス、例えば、図 4 のようなキャパシターにリークを発生させるような抵抗として回路的には表現できます。ちょっとこの回路についてみてみましょう (以下、小生の「電子回路論」の講義ノートを引用)。

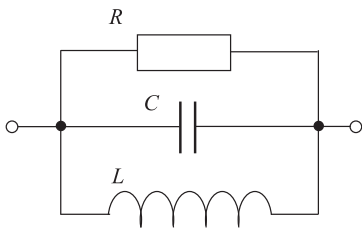


図 4 RLC 並列共鳴回路

左図のように並列接続した場合を考えると、電圧が共通で、電流が全体の和になる。

$$I_{\text{tot}}(i\omega) = \frac{V(i\omega)}{R} + i\omega CV(i\omega) + \frac{V(i\omega)}{i\omega L}.$$

従って合成インピーダンスは

$$Z_{\text{tot}}(i\omega) = \left[\frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]^{-1} \quad (3)$$

となる。

ω を変化させた時、 $Z(i\omega)$ は図 5(a) のような円の上を移動する。これを **Q 円 (Q circle)** と言う。アドミタンス Y は図 5(b) のように実軸に垂直な直線上を動く。これに対してまた、 $|Z(i\omega)|$ を ω に対してプロットすると、図 5(c) のような共鳴ピーク構造を示す。(3) の $|Z_{\text{tot}}(i\omega)|^2$ の関数形の共鳴曲線をローレンツ型の共鳴曲線 (Lorentzian) と称する。 Z の抵抗とリアクタンスの大きさが同じになる 2 つの点を ω_1, ω_2 (図 5(a)) とするとき $|Z|$ がピーク値の $1/\sqrt{2}$ をとり、 $|\omega_1 - \omega_2|$ ($\approx \gamma$) を一般に共鳴の幅という。これと ω_0 との比

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|} \approx \omega_0 CR \quad (4)$$

を共鳴の Q 値 (quality factor, Q-value) といい、共鳴の鋭さを表す。 L と C の並列回路は、電磁気エネルギーを相互にやり取りすることでエネルギーを蓄える働きがあるため、タンク回路と呼ばれている。この場合は、共鳴回路 (タンク) のリークを表す抵抗値 R が大きいほど Q が高い。これは、蓄えられたエネルギーのリークによる時定数が CR であることから、量子力学のエネルギーと時間の不確定性と原理的には全く同じである。

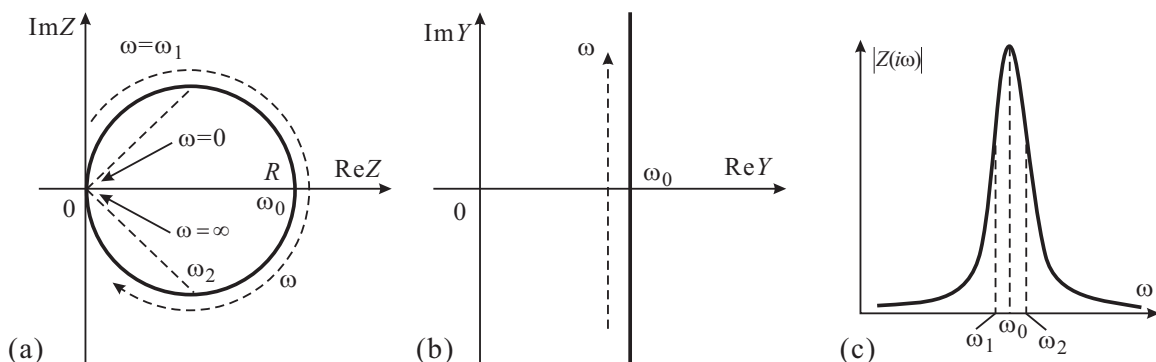


図 5 並列共鳴回路の (a) インピーダンス $Z(i\omega)$, (b) アドミタンス $Y(i\omega)$ を複素平面上に、 ω を $0 \rightarrow \infty$ に対する軌跡として描いた。共鳴点が ω_0 であり、共鳴幅に相当する周波数が ω_1, ω_2 である。(c) インピーダンスの絶対値の ω に対する変化。

引用は以上です。結局，ロスが増えると高周波振幅が減少するので，高周波振幅を検波器（これはダイオードで簡単に実現できます）にかければ損失を電圧として取り出せます。

しかしまてよ！-と思われた方，あなたは鋭い。そう，高周波は一定振幅で振っていたはずでした。ロスが出て振幅が減ってしまって良いのか？とお思いでしょう。実際には，振幅が減るとヒステリシスにかからなくなってしまい，ロスがなくなってしまいます。すると振幅が回復してヒステリシスが現れ，ロスにより振幅が減少し… ということを繰り返して，高周波振幅には変調（うなり）がかかってしまうのです。面倒ですね。ですが，このせいで，矩形波でなく三角波，あるいは正弦波が現れ，このために上手にフィードバック回路を組んでやると， Φ_0 の 1 万分の 1，あるいはそれ以上の分解能を得ることができるのです。だんだん，マニアックになってきましたので，この辺で止めたいと思います。