

半導体物理学 その13

勝本信吾

東京大学 理学系研究科・物性研究所

2016年7月7日

第7章 スピントロニクス

今回は、「半導体」の最終回である。スピントロニクスについて話をして終わりたいと思う。短い講義時間ではあるが、前半で半古典的な扱いによるスピントロニクス、後半で、スピンホール効果とトポロジカル絶縁体について考えたい。

7.1 スピン輸送の古典論

7.1.1 スピントロニクスとは

これまで、半導体中の電子の輸送現象について、古典的そして量子的なものをいろいろと見てきた。電子は、電荷とスピンに伴う磁気モーメント、角運動量を持っているので、電子の移動に伴い、電荷以外にスピン角運動量も移動する。しかし、スピンのクラマース縮退を起こして、1つの空間移動自由度に対して2つのスピン自由度が縮退して存在していれば単一電子では角運動量が移動していても、多数電子の移動を考えれば全体としての角運動量移動は消滅し、考慮の対象外であった。電子が電荷モノポールであるために、その流れと蓄積を制御することでエレクトロニクスが大発展し、それが可能になる半導体という物質がその中心として活躍した。しかし、その微細化・高速化・低エネルギー消費化が限界に達しつつある今、電子の内部自由度であるスピンを情報蓄積・操作に使用しよう、というのがスピントロニクスである [1]。

元より、情報蓄積にはスピンの多体効果によって凍結した例である磁気ディスクやテープが使用されていたが、その読み出しにスピンバルブを用いた巨大磁気抵抗 (Giant magnetoresistance, GMR) 素子が使用されるようになり、「スピントロニクス」という言葉が次第に使われるようになった。

半導体がなぜエレクトロニクスの中心であったかと言えば、逆説のようであるがまずは、絶縁体であるからである。乱れない結晶状態で電子が存在しない状況であることが最も重要であり、金属中で制御性良く電流を遮断するのは絶縁体中に伝導を導入するより数倍難しく、金属のエレクトロニクスでの役割は主に配線材であった*1。一方、スピントロニクスにおいては、常磁性金属中にはスピンの存在せず、基本的に「真空」状態である。ある意味、常磁性金属もスピントロニクスでは半導体であり、半導体物理学の対象であるとも言える。

以上は決して牽強付会なたとえや言葉の遊びではない。エレクトロニクスにおいては、金属中にはその強力な遮蔽力により、ほとんど電場、すなわち化学ポテンシャルの傾斜が存在しない。これに対して、強磁性体との接触面に電流を流すと、スピンによって化学ポテンシャルが分離する、ちょうど半導体で準フェルミ準位が電子、正孔のそれぞれに付随して存在したことに対応する状況が生じる。また、金属中でもスピン流によって化学ポテンシャルの傾斜が発生するので、外部の測定回路には電圧として認識される。従って、半導体で見えてきた様々な物理が、形は少々異なる

*1 しかし、電子回路、という概念そのものの成立は金属という物質の存在によっている。詳しくは、講師の「電子回路論」講義ノート第1回を見よ。

るが、常磁性金属中のスピントロニクスでも発生する可能性がある。

固体物理学の教科書に「スピントロニクス」という新しい章が書き加えられつつある今日、これについて扱う講義が特になく、本「半導体」で少し触れるだけ、というのはとても残念であるが、いずれ、光科学同様に特別枠が設けられることを期待したい。なお、スピンを使った量子情報系の話については、工学系研究科のナノ量子情報講義にて、3週にわたって講師自身が講義する予定である。

7.1.2 2 電流モデル

モット (Nevil Mott) が提唱したことになっている **2 電流モデル** (two current model) は、電流をアップスピン (\uparrow) とダウンスピン (\downarrow) によるものに分けて考えるもので、伝導を決める様々な散乱に比べてスピン反転散乱頻度が十分低ければ成立する。スピンサブバンドを分離した場合 ρ が \uparrow, \downarrow で異なるのは、状態密度や k_F などのパラメーターが異なるためである。 \uparrow, \downarrow スピンチャンネルの抵抗をそれぞれ $\rho_\uparrow, \rho_\downarrow$ とすると、全体の電気抵抗 ρ は、 $1/\rho = 1/\rho_\uparrow + 1/\rho_\downarrow$ で求められる。拡散的伝導体では、磁性体・非磁性体とも、スピン拡散長が平均自由行程より長く ($\lambda_F \gg l_F$)、良く成立すると考えられる一方、弾道的伝導では、特にスピン軌道相互作用が強い場合、2 電流モデルの適用には問題がある。本節では古典伝導を扱い、2 電流モデルに立脚して考える。

ドルーデ伝導度を各スピンサブバンドに適用し、スピンごとに適用し、各スピンサブバンドの伝導度が $\sigma_s = e^2 n_s \tau_s / m_s^*$ ($s = \uparrow, \downarrow$) と求められる。全電流密度は \mathbf{j}_c はそれぞれ \uparrow と \downarrow スピン電子チャンネルの電流密度の和 $\mathbf{j}_\uparrow + \mathbf{j}_\downarrow$ で与えられ、その差分の $\mathbf{j}_{p\uparrow} = \mathbf{j}_\uparrow - \mathbf{j}_\downarrow$ だけスピン偏極した電流が流れる。この **スピン偏極電流** (spin-polarized current) 密度のスピン偏極度を次で定義する。

$$P_c = \frac{|\mathbf{j}_\uparrow - \mathbf{j}_\downarrow|}{|\mathbf{j}_\uparrow + \mathbf{j}_\downarrow|} = \frac{j_{p\uparrow(\downarrow)}}{j_c}. \quad (7.1)$$

各電流をドリフト項、拡散項に分けると次のようになる。

$$\mathbf{j}_{ps} = \sigma_s \mathbf{E} - e D_s (-\nabla \delta n_s). \quad (7.2)$$

ここで、「金属では電場は立たないのでは？」という疑問が湧きそうであるが、今はごく一般的に電子集団による電荷の輸送を扱っているので、この項も考えている。

7.1.3 スピン依存電気化学ポテンシャル

スピン注入 (あるいは流出) などによってスピンサブバンド間に非平衡が生じている場合でも、各サブバンド内のキャリア間散乱は十分頻繁で、局所的な熱平衡が保たれているとし、各スピンサブバンドの局所フェルミ運動エネルギー ϵ_s 、熱平衡からのずれ $\delta \epsilon_s$ を定義する。簡単のため、伝導度テンソル σ_s をスカラー σ_s で置き換える。静電ポテンシャル ϕ を使って $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ と書き、アインシュタインの関係式 $\sigma_s = e^2 N_s(E_F) D_s$ (これは金属を考えて低温極限から得られたものである)、 $\delta n_s = N_s(E_F) \delta \epsilon_s$ を用いることで、次を得る。

$$\mathbf{j}_{ps} = -\frac{\sigma_s}{e} \left[e \nabla \phi - \frac{D_s \nabla \delta n_s}{\sigma_s} \right] = \frac{\sigma_s}{e} [-e \nabla \phi + \nabla \delta \epsilon_s]. \quad (7.3)$$

2 電流モデルの適用により各スピンに対しての局所電気化学ポテンシャル

$$\mu_s = -e \phi + \epsilon_s \quad (7.4)$$

が定義でき、各スピンサブバンドの電流密度は、これにより、

$$\mathbf{j}_{ps} = -\frac{\sigma_s}{-e} \nabla \mu_s \quad (7.5)$$

と表される。(以下電気化学ポテンシャル、は化学ポテンシャルと略記)

7.1.4 スピン流

スピン角運動量の流れ、**スピン流** (spin current) の定義として、

$$\mathbf{j}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2(-e)}(\mathbf{j}_\uparrow - \mathbf{j}_\downarrow) \quad (7.6)$$

が考えられる。スピン流は、本来局所スピン密度を示すベクトルと流れを示すベクトルにより構成されるテンソルであるが、ここでは、簡単のためスピン角運動量の磁化方向 (z 方向とする) 成分の流れとしてスピン流を考えている。また、一般には、ここで考えた電子の流れに伴うスピン流以外に、スピン波など交換相互作用によって流れるスピン流もある。

局所スピン角運動量密度を $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ 、その z 方向成分を s_z と置くと、スピン角運動量保存則は

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}^s = 0 \quad (7.7)$$

となる。スピン緩和が存在する場合は、(7.7) の右辺に緩和項を考える必要がある。緩和時間近似を用いると、

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}^s = \frac{\partial s_z}{\partial t} + \frac{\hbar}{2(-e)} \nabla \cdot (\mathbf{j}_\uparrow - \mathbf{j}_\downarrow) = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\delta n_\uparrow}{\tau_\uparrow} - \frac{\delta n_\downarrow}{\tau_\downarrow} \right). \quad (7.8)$$

これに対して電荷 ρ の保存則は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_\uparrow + \mathbf{j}_\downarrow) = 0. \quad (7.9)$$

定常状態では、 $\partial \rho / \partial t = \partial s_z / \partial t = 0$ である。また、緩和時間 τ_\uparrow と τ_\downarrow は、系全体としてスピン反転が生じていないという条件から、フェルミ準位状態密度 N_s を使った詳細釣り合い

$$N_\uparrow \tau_\downarrow = N_\downarrow \tau_\uparrow \quad (7.10)$$

の関係にある。これらと、式 (7.8)、(7.9) より

$$\nabla^2 (\sigma_\uparrow \mu_\uparrow + \sigma_\downarrow \mu_\downarrow) = 0, \quad (7.11a)$$

$$\nabla^2 (\mu_\uparrow - \mu_\downarrow) = \frac{1}{(\lambda_{sf}^F)^2} (\mu_\uparrow - \mu_\downarrow) \quad (7.11b)$$

が得られる。平均スピン拡散長 λ_{sf}^F は \uparrow, \downarrow スピンの拡散長 $\lambda_\uparrow^F, \lambda_\downarrow^F$ を用いて $(\lambda_{sf}^F)^{-2} = (\lambda_\uparrow^F)^{-2} + (\lambda_\downarrow^F)^{-2}$ により定義する。(7.11b) は拡散方程式の形式になっており、**スピン拡散方程式** (spin diffusion equation) と呼ばれる。

7.2 スピン注入と緩和

半導体中に光照射や pn 接合への順方向バイアス印可などによって少数キャリアを注入したのと同様、常磁性体中にスピンを注入する様々な方法が存在する。ここでは特に、強磁性体から常磁性体へのスピン注入 (spin injection) について述べる。少数キャリアの場合と同様、スピン注入は界面で生じ、バルク内部へ広がりつつ消滅 (緩和) する。

強磁性 (FM)-常磁性 (NM) の界面に垂直に電流 j_c を流している状況を考える。FM, NM 各領域でのスピン s に依存する局所化学ポテンシャル (式 (7.5)) を、次のように書いてみる。

$$\mu_s^M = a^M + b^M x \pm \frac{c^M}{\sigma_s^M} \exp\left(\frac{x}{\lambda_{sf}^M}\right) \pm \frac{d^M}{\sigma_s^M} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{sf}^M}\right). \quad (7.12)$$

ここで、M は、F(強磁性) または N(常磁性) の各領域を表す。 x 軸は面垂直方向に、界面を原点に取り、常磁性体側を正とする。 \pm の複号は、+ が \uparrow 、- が \downarrow に対応している。右辺第 1, 2 項はスピンによらない部分で、この 2 項の和を μ_0 と書く。第 3, 4 項は、スピン依存部分が拡散方程式 (7.11) に従うことからこのように置いた。式 (7.12) が、(7.11) を満たしていることは容易に確認される。

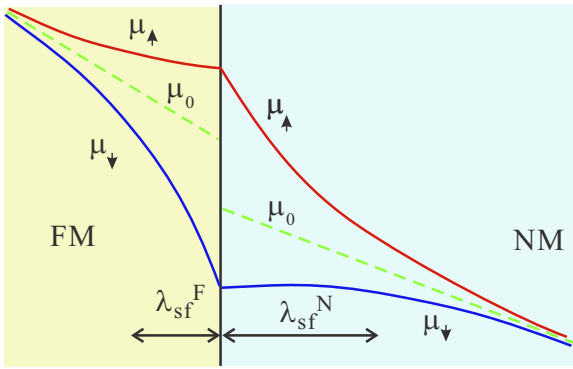


図 7.1 FM-NM 界面に FM 側から電子が流れるような電流の下でのスピン依存化学ポテンシャルの空間変化模式図.

係数 $a \sim d$ は以下の条件から決定する. 2 電流模型は界面を通して成立しているとする, 各スピンサブバンドで局所化学ポテンシャル μ_s は界面でも連続, すなわち $\mu_s^F(-0) = \mu_s^N(+0)$ である. μ_0 は \uparrow, \downarrow 間に非平衡が生じている界面では連続である必要はないが, $|x| \rightarrow \infty$ で界面から離れるに従い, FM, NM の両側で $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ の差はなくなり μ_0 に漸近するので, $d^F = 0, c^N = 0$ である. また, 式 (7.5) のスピンサブバンドの電流の和は全電流密度 j_c となる. 以上から F 中の状態密度スピン偏極 P_F を用いて μ_s^M は次のように得られる.

$$\mu_s^F = \frac{(-e)j_c}{\sigma^F} x \mp \frac{(-e)j_c P_F \lambda_{sf}^N (1 - P_F^2) \sigma^F}{2\sigma^F \sigma^N \left[1 + (1 - P_F^2) \frac{\sigma^F \lambda_{sf}^N}{\sigma^N \lambda_{sf}^F} \right]} \exp\left(\frac{x}{\lambda_{sf}^F}\right), \quad (7.13a)$$

$$\mu_s^N = \frac{(-e)j_c}{\sigma^N} x + \frac{(-e)j_c P_F \lambda_{sf}^N}{\sigma^N \left[1 + (1 - P_F^2) \frac{\sigma^F \lambda_{sf}^N}{\sigma^N \lambda_{sf}^F} \right]} \left[1 \mp \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{sf}^N}\right) \right]. \quad (7.13b)$$

複号上下は \uparrow, \downarrow に対応する. 平衡状態 ($j_c = 0$) での化学ポテンシャルを 0 に取った. 図示すると, 図 7.1(a) のようになる.

7.2.1 スピン注入と検出

電気伝導の制御を行う舞台として, 元来絶縁体である半導体が適しているように, スピン流の操作や制御にも磁性体より非磁性体の方が適しているが, そのためには pn 接合で見た「キャリアの注入」に相当する非磁性体へのスピン注入 (spin injection) が 必要である. 図 7.1 のようにスピン流と電流が重なると, 電氣的測定では電流の直接的効果とスピン偏極効果の分離が難しいため, 実際のスピン注入実験では, 非局所配置が多く使用される.

例を図 7.2 に示した. パーマロイ (Py)1 と銅 (Cu) との間に電流 j_c を流すと, 界面で図 7.1(a) のように μ_\uparrow と μ_\downarrow が分離し, スピン蓄積が生じる. 電流は Py2-Cu 間には流れないが, スピン拡散は電流とは関係なく生じ, スピン流は Py2 方向にも流れて Py2 電極に到達するため, これによって Py2-Cu 間に電気化学ポテンシャルの差が生じ, 電

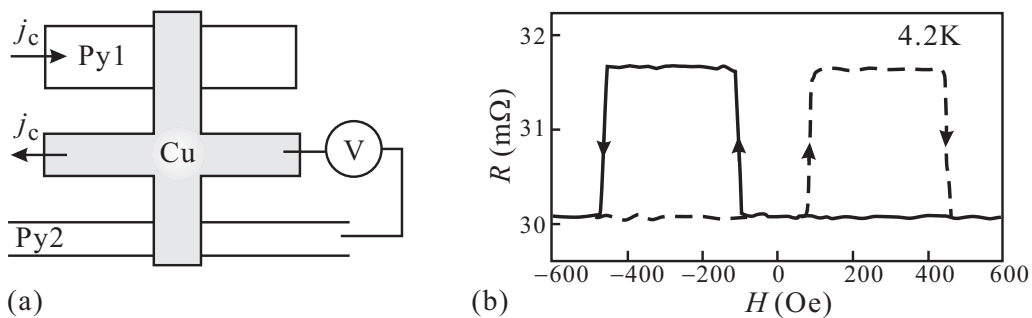


図 7.2 (a) スピン注入効果の非局所測定配置. 電流 j_c は Cu のクロス点を通して左へ抜けるが, Py1 より注入されたスピン流は Py2 へ達して界面にスピン蓄積することで μ_0 のステップを引き起こし, 電圧 V として検出される. (b) 測定された非局所抵抗. スピンパルプ的磁気抵抗は, Py1 と Py2 の形状の違いによる保磁力差によるもの. データは文献 [2] より.

圧として検出される。検出される電圧は、式 (7.13) とスピン拡散式 (7.11b) から、次のように計算される。

$$V = \pm \frac{1}{2} e j_c P_{Py}^2 \frac{\rho^{Py} \rho^{Cu}}{\rho^{Py} + \rho^{Cu}} \exp\left(-\frac{L}{\lambda_{sf}^{Cu}}\right). \quad (7.14)$$

図 7.2(b) が実験結果で、 Py_1 と Py_2 は幅を変えてあるため、ストリップ方向の磁場に対する保磁力が違っており、これによってスピンバルブ的な非局所磁気抵抗が現れている。様々なパラメーター下の実験を (7.14) で解析することで、 P_F や λ_{sf} などのパラメーターを得ることができる。

図 7.3(a) に半導体へのスピン注入で多用される非局所 4 端子配置の模式図を示した。強磁性体を含む左側の 2 本の電極間に電流を流し、右のやはり強磁性体電極を含む電圧端子でスピン流によって生じた電気化学ポテンシャル差を測定する。このような針状薄膜電極では、外部磁場による磁化反転は、形状磁気異方性のために電極の長手方向に磁場を印加して行う。一方、注入されるスピンの垂直な方向に磁場を印加すると、スピン磁気モーメントは歳差運動を生じる (付録 J)。この時、仮に電子がすべて完全にコヒーレントに回転し、電子がスタートする位置も完全に揃っているとすると、検出電圧はこの回転角度に応じて振動する。拡散過程においては遍歴距離は広く分布する上に、実際の試料では開始位置に幅があるから歳差回転が進むにつれて振動は急速に減衰する。これを Hanle 効果 (Hanle effect) と呼ぶ。

常磁性体中での x 軸方向 1 次元のスピン拡散を考えると、7.1 節の議論で、 σ_s 、 D_s 、 τ_s などのスピン依存が落ちる。(7.2) で、非局所測定で拡散流のみであることを考え、ドリフト項を落とし、(7.8) の緩和時間近似を適用すると、次のスピン拡散方程式

$$\frac{\partial s_z}{\partial t} = D \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} - \frac{s_z}{\tau_{sf}} \quad (7.15)$$

が得られる。これによって Hanle 信号は

$$\Delta V = \pm \frac{j_c P_j^2}{e^2 N_{SC}} \int_0^\infty dt \varphi(t) \cos \omega t, \quad (7.16)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{d^2}{4Dt}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_{sf}}\right)$$

と書くことができる。ここで、 d は注入電極と検出電極の距離、 P_j は接合直下でのスピン偏極で、 $\omega = g\mu_B B/\hbar$ はラーモア周波数 (付録 J) である。

図 7.3(b) に示したのは、Si に Fe 電極を用いてスピン注入を行い、Hanle 信号を測定したもので、(7.16) を用いてフィットすることができる。ここから λ_{sf} などのパラメーターを得ることができる。

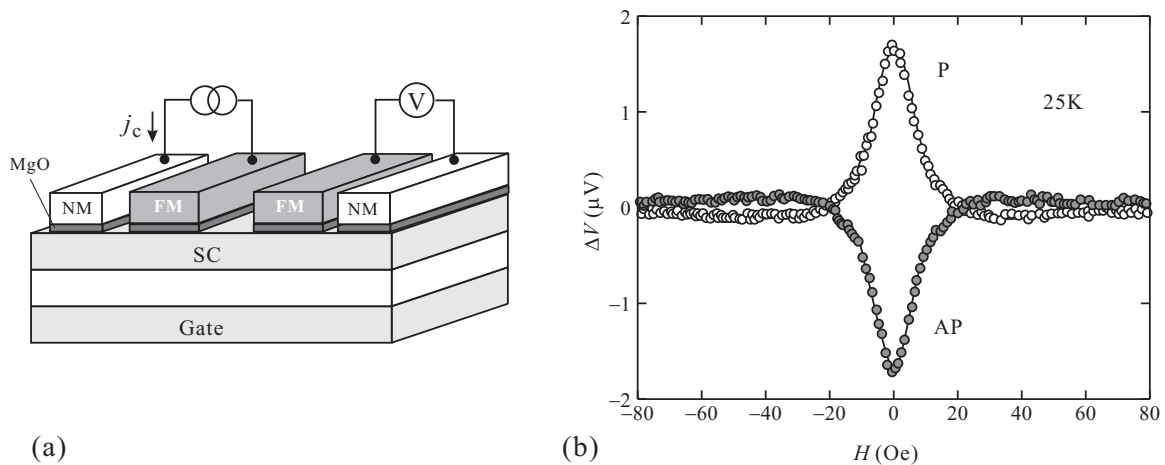


図 7.3 (a) 半導体 (SC) へのスピン注入を 4 端子非局所効果で検出するための電極配置。左の強磁性体 (FM) と常磁性体 (NM) 間に電流 j_c を流すことで、スピン流は右方向へも流れ、右の FM 電極と NM 電極に生じる電気化学ポテンシャル (電位) 差として検出される。注入効率を上げるため、MgO などの絶縁体障壁が用いられる。(b) 左と類似の構造で Si にスピン注入して面垂直磁場によってスピン歳差運動を生じさせて観測された Hanle 信号。文献 [3] より。

7.3 スピン軌道相互作用

ここからは、電荷キャリアの意味で「半導体」に特有のスピン트로ニクスに入っていこう。スピン軌道相互作用 (spin-orbit interaction, SOI) については k - p 摂動の際に、特に III-V 族のような fcc 系半導体について導入されたと思う。SOI は、スピン트로ニクスにおいては、スピン自由度と軌道自由度従って電荷との間を結合するものとして重要である。ここで、特に価電子帯で強かった SOI が、伝導帯との混じりを通して伝導帯でも重要になる場合を見ておきたい。2次元電子系で代表的な2つのスピン軌道相互作用について考える。

7.3.1 バルク反転非対称、構造反転非対称によるスピン-軌道分裂

結晶格子に空間反転対称性があると、 \mathbf{k} と $-\mathbf{k}$ の状態は縮退している。↑スピンを例にとると、 $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(-\mathbf{k}, \uparrow)$ 。一方、磁性などがない場合結晶系は時間反転対称性を持っているが、時間反転操作によって $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ となると同時にスピンも反転する。この2つの縮退を合わせると、 $E(\mathbf{k}, \uparrow) = E(\mathbf{k}, \downarrow)$ であるから、空間反転対称性がある結晶では \mathbf{k} が有限であってもスピンによるエネルギーの分裂は生じない。

閃亜鉛鉱型の結晶形を見ると、[111] 方向に反転対称性がないことが明らかであり、エネルギー分散にスピン軌道相互作用に起因するスピン分裂が生じる。このような結晶形の反転非対称をバルク反転非対称 (bulk inversion asymmetry, BIA) という。BIA によって発生するスピン軌道相互作用をドレッセルハウススピン軌道相互作用 (Dresselhaus spin-orbit interaction) と呼ぶ。ドレッセルハウス相互作用は、BIA を考慮した $k \cdot p$ 摂動 (関連図書 [4], 文献 [5]) から導かれる。

$\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ の非対称による効果であるから、相互作用は、 \mathbf{k} の奇数次の形をとるが、3次元のドレッセルハウス相互作用は \mathbf{k} の3次で与えられ、ハミルトニアンは [100], [010], [001] を xyz として、

$$\mathcal{H}_{\text{DSO}}^{3\text{d}} = \gamma \hbar^2 [k_x(k_y^2 - k_z^2)\sigma_x + k_y(k_z^2 - k_x^2)\sigma_y + k_z(k_x^2 - k_y^2)\sigma_z] \quad (7.17)$$

という形をしている。このような半導体に (001) 面に平行な2次元電子系を形成したとすると、 z 方向の自由度は平均化され、一部 k の1次の項が現れる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{DSO}}^{2\text{d}} &= \gamma \hbar^2 [k_x(k_y^2 - \langle k_z^2 \rangle)\sigma_x + k_y(\langle k_z^2 \rangle - k_x^2)\sigma_y] \\ &= \beta(k_y\sigma_y - k_x\sigma_x) + \gamma \hbar^2 (k_x k_y^2 \sigma_x - k_y k_x^2 \sigma_y). \end{aligned} \quad (7.18)$$

結晶形に由来する BIA に対し、ヘテロ接合のような周期性を破る構造の導入によっても反転対称性は失われる。これを構造反転非対称 (structure inversion asymmetry, SIA) と呼ぶ。接合面の SIA によって導入されるスピン軌道相互作用をラシュバスピン軌道相互作用 (Rashba spin-orbit interaction) と呼ぶ [6, 7]。ラシュバ相互作用は、界面に垂直 (z 方向) に電場 \mathcal{E} が生じていると考え、

$$\mathcal{H}_{\text{RSO}} = \alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z) = \alpha(k_y\sigma_x - k_x\sigma_y) \quad (7.19)$$

となる*2。注意すべきは「電場 \mathcal{E} 」である。 $\mathcal{E} = \nabla V/e$ の V は周期ポテンシャル以外に電子に働く (バンド不連続等によるものも含めた) 力すべてであり、伝導電子を2次元面に閉じ込めているものであるから、電子が2次元面に束縛されているということは z 方向の重心運動に関するエーレンフェストの定理によって、 z 方向の \mathcal{E} の期待値平均はゼロ、 $\langle \mathcal{E}_z \rangle = 0$ である [8]。従って、電子系にかかる電場 \mathcal{E} によってラシュバ相互作用を導入することはできない。

秋山教授の k - p 摂動の講義で見たように、有限な \mathbf{k} によって伝導帯電子波動関数への価電子帯波動関数が混じりこむことによりスピン軌道相互作用が生じていた。その際には、伝導帯・価電子帯に共通の対角成分 V を導入したが、両者でバンド不連続が異なれば V も異なり、伝導帯で $\langle \mathcal{E}_z \rangle = 0$ であれば、価電子帯は $\langle \mathcal{E}_z \rangle \neq 0$ となり、これを通し

*2 これから、「電場が生じていることは2次元電子系の両側に電荷が発生している事を意味し、電子と一緒に動く座標系からは環電流が生じていて磁場を発生し、その効果がラシュバ相互作用である」という直感的説明がしばしばなされるが、以下に見るようにこの説明は不正確である。

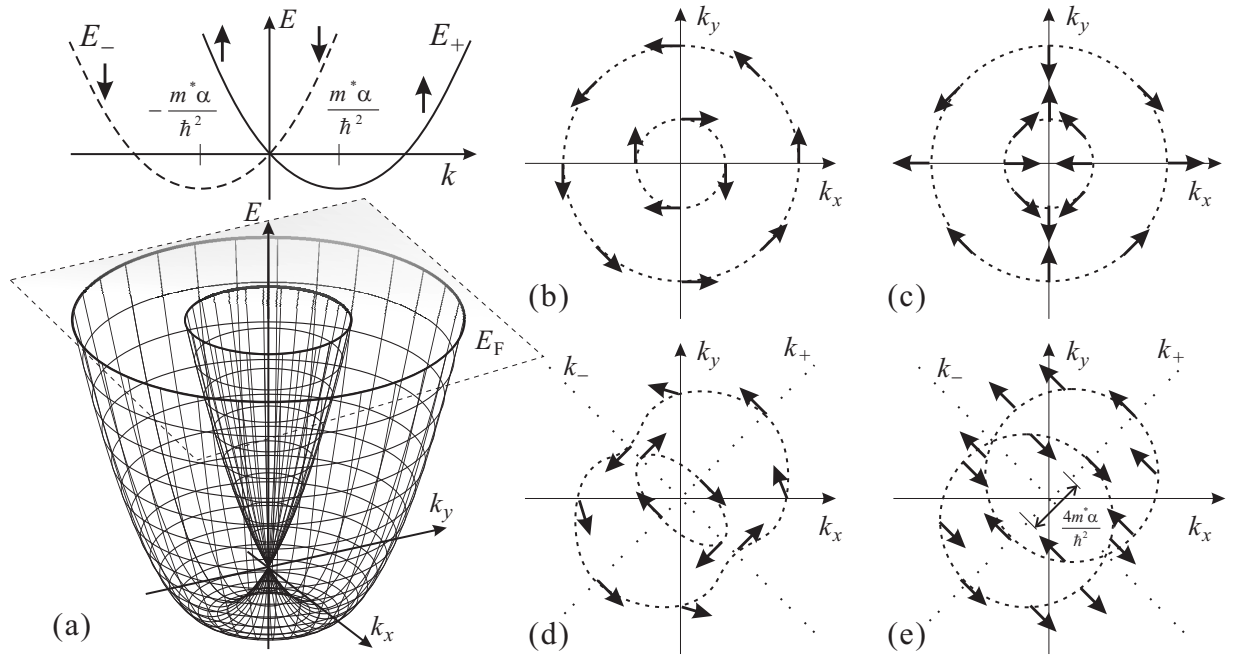


図 7.4 (a) 上: ラシュバ相互作用がある場合のエネルギー分散 (7.20) を描いたもの. $+\pi/2$ のスピンを上向きとして描いている. 下: $k_x - k_y$ 平面上にエネルギー分散を 3 次元的に描くとこのワイヤフレーム表示のようになる. (b) 以降の図は, E_F の面での切り口を描いている. (b) $\beta = 0$ (ラシュバ模型) の場合の, 2 つのフェルミ円 (短い破線) 上でのスピンの向き. (c) $\alpha = 0$ (ドレッシェルハウス模型) の場合. (d) α, β が有限で, $\alpha \neq \beta$ の場合. (e) $\alpha = \beta$ の場合.

てラシュバスピ軌道相互作用が生き残る. 伝導帯・価電子帯でそれぞれ V_c, V_v を考えて SOI を表す式を導出すると, \mathcal{E} を $\mathcal{E}_v = \nabla V_v/e$ で置換したものが得られる. 実験では, 狭ギャップの InGaAs の 2 次元系などで, ラシュバ相互作用に起因すると考えられる現象が多く見つかっており, 価電子帯の効果と考えられる.

ラシュバ相互作用 (7.19) とドレッシェルハウス相互作用 (7.18) の内の 1 次の項のみ存在する 2 次元電子系を考える. 軌道部分は, 波数 $\mathbf{k} = (k \cos \varphi, k \sin \varphi)$ を持つ平面波とすると, スピン軌道部分ハミルトニアンは次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{SO}} &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{k}_x + \hat{k}_y \\ i\hat{k}_x + \hat{k}_y & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -\hat{k}_x - i\hat{k}_y \\ -\hat{k}_x + i\hat{k}_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha k \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} - \beta k \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\beta = 0$ (ラシュバ系) の場合, スピン部分を ${}^t(1, e^{i\phi})/\sqrt{2}$ と置くと, 固有関数条件より $\phi = \varphi \pm \pi/2$, すなわち波数ベクトルとスピンは直交し, $\pm\pi/2$ に対応する固有エネルギー E_{\pm} は有効質量近似により

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \mp \alpha k = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(k \mp \frac{m^* \alpha}{\hbar^2} \right)^2 - \frac{m^*}{2\hbar^2} \alpha^2 \quad (7.20)$$

と, スピンの向きによって分散が k 空間でシフトする. 分散は図 7.4(a) のような形状になり, E_F での断面では, 同心円状の 2 つのフェルミ円が生じる. 条件より, フェルミ円上各点でのスピンの向きは, 図 7.4(b) のように互いに逆向きの渦巻き状になる. $\alpha = 0$ の場合も同様に, $\phi = -\varphi, -\varphi + \pi$ が得られ, エネルギー分散も式 (7.20) で α を β で置き換えるだけで同形となる. ただし, \mathbf{k} をフェルミ円に沿って回転させるとスピンは \mathbf{k} とは逆の方向に回転するので, 図 7.4(c) のような形状となる.

α と β の両方が存在する場合, 一般には図 7.4(d) のように, スピンも分散も面倒な形になる. $\alpha = \beta$ の場合, $\mathcal{H}_{\text{SO}} = \alpha(\hat{k}_x + \hat{k}_y)(\sigma_x - \sigma_y)$ と, 波数部分とスピン部分が分離され, それぞれ, $k_{\pm} = \frac{k_y \pm k_x}{\sqrt{2}}, \chi_{\pm} = \pm {}^t(1/\sqrt{2}, (i-1)/2)$ と波数, スピン波動関数を回転させると, ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (\hat{k}_+^2 + \hat{k}_-^2) - 2\alpha \hat{k}_+ \sigma'_z \quad (7.21)$$

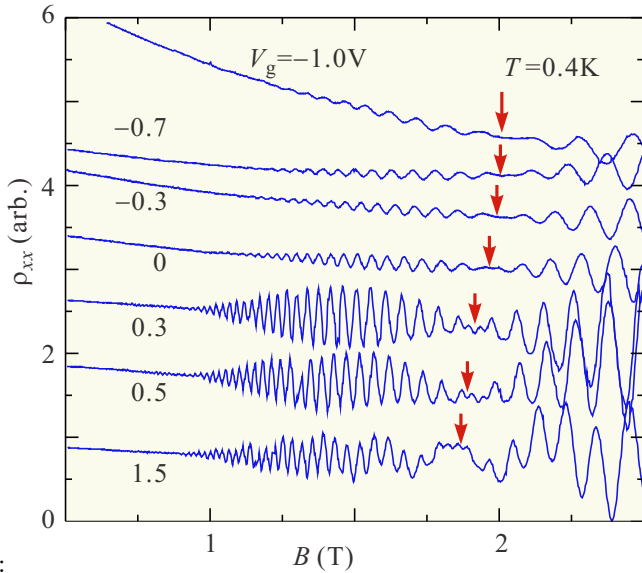


図 7.5 $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ 量子井戸中の 2 次元電子系で SdH 振動を測定したもの. 2 次元電子系表面のゲート電極に加える電圧 V_g を変化させている. 矢印はビートの谷の位置を示した. [9] より.

と書ける. σ'_z は χ_{\pm} を基底とした表示でのパウリ行列である. 波数とスピンの分離しているため, スピン部分の固有関数 χ_{\pm} を決めると, 分散関係は通常のパラボラになるが, χ_+ , χ_- に依存してパラボラの中心位置が k_+ 軸方向に $\pm 2m^*\alpha/\hbar^2$ だけシフトする. 従って, 図 7.4(e) のように, スピンの向きに応じて 2 つの独立なパラボラが存在し, 2 つのフェルミ円は中心がシフトし, 一部重なり合った形になる.

7.3.2 スピン軌道相互作用と SdH 振動

ラッシュバ相互作用が強くて β が無視できるような 2 次元電子系では, 図 7.4(b) のように 2 つのフェルミ円が存在している. このような系で SdH 振動を測定すると, フェルミ円の大きさは $1/B$ プロットの周期に反映されるから, 2 種類の大きさのフェルミ円が存在するという事は, 2 種類の SdH 振動周期が共存することを意味し, 従ってこれらの振動間にビート (うなり) を生ずるはずである. しかも, これらのフェルミ円の大きさの差は (7.19) の α 従って $\langle \mathcal{E}_{zv} \rangle$ に比例するから, ビートの周期は 2 次元電子系 (の価電子帯) に外部から加えた電場によっても変化するはずである.

図 7.5(a) は, InP 基板上に成長した (In,Ga)As の量子井戸中の 2 次元電子系で測定した SdH 振動である. 狭ギャップの InAs と比較的ギャップの大きな GaAs では格子定数に大きな差があるが混晶にして In 組成を 0.53 とすることで InP 基板に格子整合し, 更に Al を混晶に加えることでヘテロ接合を形成できる. SdH 振動には明瞭なビートが現れており, 矢印で示したビートの谷の位置がゲート電圧によってシフトする, ラッシュバ相互作用に期待される特徴が現れている.

7.4 スピンホール効果とトポロジカル絶縁体

7.4.1 スピンホール効果

スピンホール効果 (spin Hall effect) は, スピン軌道相互作用のある系に電場を加えるとこれと垂直方向にスピンの流が発生する現象である. スピンホール効果によるスピン流をスピン座標指数 i , 流れの座標指数 j に対して J_{ij} と書いて電場 \mathbf{E} に対して

$$J_{ij} = \sigma_s \sum_k \epsilon_{ijk} E_k \quad (7.22)$$

と書くことができる. ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルで, スピン流のスピンの流れ, 及び電場がそれぞれ互いに垂直であることを表す. σ_s をスピンホール伝導度と呼ぶ.

スピンホール効果は不純物散乱, あるいはバンド構造に起因する軌道運動から SOI を通して発生する. 前者を外

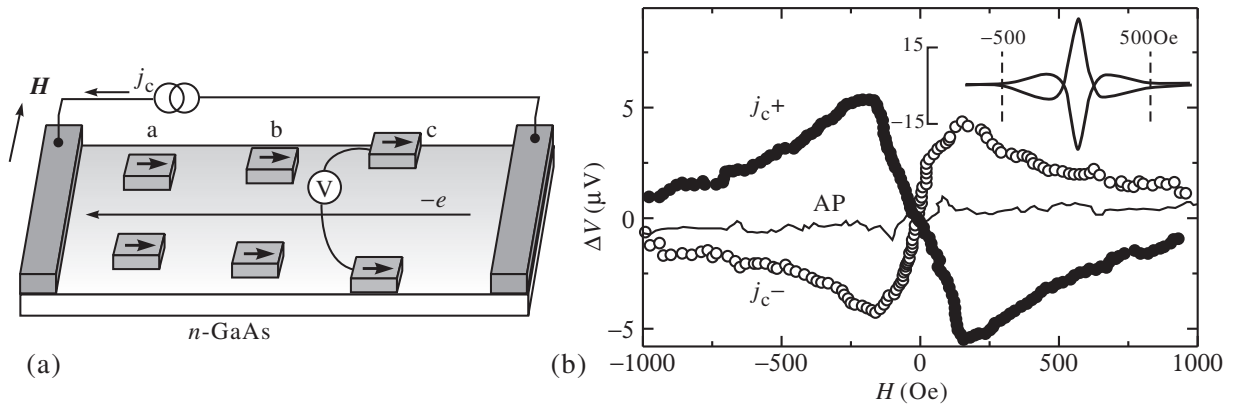


図 7.6 (a) n 型 GaAs 試料の電極配置. 電流に垂直に対向した Fe 電極で, 試料端のスピンの蓄積を検出する. (b) 試料端から $2\mu\text{m}$ にある電極でのスピンの蓄積信号. 電流密度は $5.7 \times 10^3 \text{ A/cm}^2$. 黒丸白丸は平行磁化配置に電流の向きを反転した結果, 実線は反平行磁化配置の結果. 挿入図は, 電極間の Hanle 効果測定. 温度は 30K .

因性スピンホール効果, 後者を内因性スピンホール効果と呼ぶ.

ここでは, 時間の関係で詳しい説明を一切省略し, 実験例を紹介しよう. 図 7.6 は, n 型の GaAs に電流を流し, スピンホール効果によって試料端に生じるスピンの蓄積を強磁性体電極に生じる化学ポテンシャル差として検出した実験である. 電流反転に追従して反転する明瞭なスピン信号 (反平行磁化配置ではほとんど何も現れない) が検出され, スピンホール効果が生じていることがわかる. 温度変化などの解析から, 外因性スピンホール効果が主に生じていると議論されている.

7.4.2 異常速度とスピンホール効果

結晶中波束の運動を考える. 波束を結晶波数で分解し, 各ブロッホ状態成分について外力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ (\mathbf{E} は電場) による \mathbf{k} の変化を調べる. この時, 結晶ハミルトニアン \mathcal{H}_0 に対して, 波数 \mathbf{k} をパラメーターとする「ブロッホハミルトニアン」 $\mathcal{H}_B(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathcal{H}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ を考えると, 固有関数は結晶周期関数 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ である.

この $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ の世界から見ると, \mathbf{k} の変化は系 (ハミルトニアン) のパラメーターが変化しているように見える. これはベリー位相を考えた時と同じ状況であり, 断熱変化のパラメーターセット \mathbf{R} として結晶波数 \mathbf{k} を取ったと見ることができる. この時, ベリー接続, ベリー曲率はそれぞれ

$$\mathbf{A}_n = i \left\langle u_{n\mathbf{k}} \left| \frac{\partial u_{n\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right. \right\rangle, \quad \mathbf{B}_n(\mathbf{k}) = i \left\langle \frac{\partial u_{n\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \left| \times \right. \left| \frac{\partial u_{n\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \right. \right\rangle \quad (7.23)$$

となる.

ブロッホ関数を $|n\mathbf{k}\rangle$ と書き, 更にバンドは n に限定することにし, 指数 n は略す. 今, 何らかの原因により式 (7.23) の諸量がゼロでなかったとすると, 座標演算子 \hat{r} の \mathbf{k} 表示は $(\partial/\partial \mathbf{k})$ を $\nabla_{\mathbf{k}}$ と表記して

$$\langle \mathbf{k} | \hat{r} | \mathbf{k}' \rangle = (i\nabla_{\mathbf{k}} + \mathbf{A}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

となる. これは磁場中の動的運動量が座標表示で $-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}$ と書かれることに対応している. これから

$$\langle \mathbf{k} | [\hat{x}, \hat{y}] | \mathbf{k}' \rangle = (i\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A})_z \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = iB_z \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

が得られる. \mathbf{F} による \hat{x} , \hat{k}_x 演算子の時間変化を, ハイゼンベルク方程式 $d\hat{q}/dt = [\hat{q}, \mathcal{H}_0 - \mathbf{F} \cdot \hat{r}]/i\hbar$ とこれらの交換関係を用いて計算すると, 次のようになる.

$$\left\langle \mathbf{k} \left| \frac{d\hat{x}}{dt} \right| \mathbf{k}' \right\rangle = \left[\frac{\partial E}{\partial k_x} - (\mathbf{F} \times \mathbf{B})_x \right] \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\hbar}, \quad \left\langle \mathbf{k} \left| \frac{d\hat{k}_x}{dt} \right| \mathbf{k} \right\rangle = F_x \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\hbar}.$$

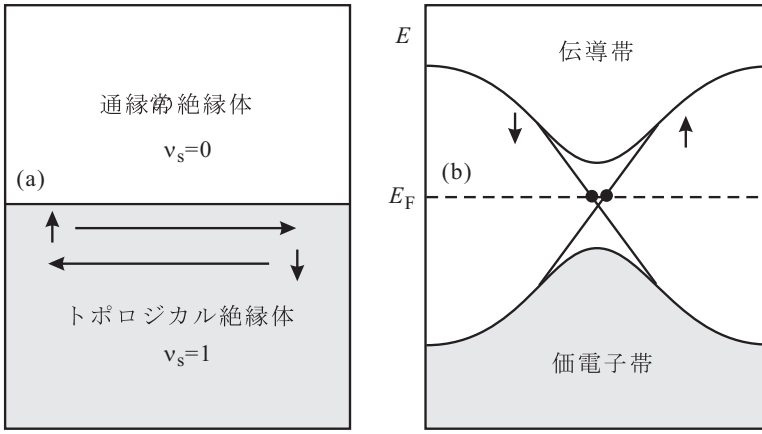


図 7.7 トポジカル絶縁体概念図. (a) $y < 0$ を 2 次元トポジカル絶縁体が占め、ヘリカル端状態が 1 対生じている. 真空側は通常の絶縁体. 端状態の数に対応してトポジカル絶縁体側のスピンのチャーン数は 1. (b) エネルギー図. 線形分散を持つヘリカル端状態が生じている [10].

以上の条件下で、波束 f を、 $f = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle$ ($a_{\mathbf{k}} = \langle \mathbf{k} | f \rangle$) とブロッホ展開する. f の実空間、 k 空間での期待値 \mathbf{r}_0 , \mathbf{k}_0 の時間変化は、それぞれ、

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v} = \left\langle f \left| \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right| f \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\langle f | \mathbf{k} \rangle}{\hbar} (\nabla_{\mathbf{k}} E - \mathbf{F} \times \mathbf{B}) \langle \mathbf{k} | f \rangle \approx \frac{1}{\hbar} (\nabla_{\mathbf{k}} E - \mathbf{F} \times \mathbf{B})|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad (7.24a)$$

$$d\mathbf{k}_0/dt = \mathbf{F}/\hbar \quad (7.24b)$$

となる. (7.24a) では、波束全体での平均を \mathbf{k} の期待値での値に置換した. 有効質量近似とは、(7.24a) の第 2 項がベリー曲率のため異なっており、これを異常速度 (anomalous velocity) と呼ぶ.

TKNN 公式より、フェルミ準位がバンドの間 (バンドギャップ内) にある絶縁体状態 (すなわち、フェルミ準位より下のバンドは完全に占有され、上のバンドは空) で、異常速度が存在する場合には $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$ よりホール伝導度が量子化されるが、通常は時間反転対称性がある場合はベリー曲率 \mathbf{B} がゼロのため異常速度もなく、ホール伝導度は消える. \uparrow, \downarrow で系を分けて $\sigma_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ を考えると、定義 (7.6) より、 $\mathbf{j}^s = (\hbar/(-2e))(\sigma_{xy}^{\uparrow} - \sigma_{xy}^{\downarrow})E$, 従って

$$\sigma_{xy}^s = \frac{\hbar}{-2e} (\sigma_{xy}^{\uparrow} - \sigma_{xy}^{\downarrow}) = \frac{-e}{4\pi} (\nu^{\uparrow} - \nu^{\downarrow}) = \frac{-e}{4\pi} \nu_s \quad (7.25)$$

である. ここで、 $\nu^{\uparrow\downarrow}$ は、各スピンサブバンドのチャーン数で、その差 ν_s は、スピンのチャーン数と呼ばれる. スピンのチャーン数が有限であるためには、各スピンサブバンドで磁場と同様な効果を与え、(7.25) がその差を取っていることから、スピンによってその有効「磁場」の効果が反転するようなものであれば良い. ラッシュバ模型のような 1 次のスピン軌道相互作用がこの条件を満たしていることは明らかであり、このため、スピンホール効果が現れた、と解釈することができる.

7.4.3 量子スピンホール効果

上の議論は絶縁体についてのものであり、「各スピン電子の電流」について注意を要する [10]. 合計の電流はゼロでも各スピンの電流は流れることも考えられ、この場合、各スピンのホール伝導度は e^2/h 単位で量子化される. xy 平面の $y < 0$ 領域にこのような 2 次元電子絶縁体が存在する場合を考えると $\Theta(x)$ をヘビサイド関数として、 $j_x^{\chi} = \Theta(y)\sigma_{xy}^{\chi}E_y$, $j_y^{\chi} = -\Theta(y)\sigma_{xy}^{\chi}E_x$ であるから (χ は \uparrow または \downarrow)、電荷連続の式は次のようになる.

$$\frac{d\rho^{\chi}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}^{\chi} = \frac{d\rho^{\chi}}{dt} - \delta(y)\sigma_{xy}^{\chi}E_x = \frac{d\rho^{\chi}}{dt} - \delta(y)\nu^{\chi} \frac{e^2}{h} E_x = 0.$$

$\chi = \uparrow, \downarrow$ についての 2 つの式について辺々差を取り、系全体について空間積分することで、

$$\frac{dS_z}{dt} = L \frac{-e}{2\pi} \nu_s E_x$$

が得られる. ただし、 S_z は系全体のスピンの z 成分、 L は $y = 0$ の所の端の長さである. これからわかるように、端に特別なことを考えないと S_z の保存則が満たされなくなる.

そこで、量子ホール効果の時と同様端状態を考えるが、全体で電荷を運ばないはずなので、境界上で互いに逆向きの速度とスピンを持った2つの端状態(ヘリカル端状態 (helical edge state)) を考える。その分散を $E_k^{\uparrow\downarrow} = \pm v(\delta k_x - eE_x t)$ (\uparrow : +, \downarrow : -, $\delta k_x = k_x - k_F$) とする。これによって単位時間内に変化する粒子数は $\delta N_{\uparrow\downarrow} = \pm eE_x L/2\pi$ であるから、

$$\frac{dS_z}{dt} = \frac{1}{2}(\delta N_{\uparrow} - \delta N_{\downarrow}) = L \frac{e}{2\pi} E_x.$$

2つの式を比較することで、全体として $dS_z/dt = 0$ とすると、ヘリカル端状態の数がスピン・チャーン数と一致することがわかる。

このような絶縁体を、量子スピンホール絶縁体、あるいは**トポロジカル絶縁体** (topological insulator) と呼んでいる。スピン・チャーン数も整数であるから、式(7.25)よりトポロジカル絶縁体のスピンホール伝導度は $e/4\pi$ を単位に量子化されている。

参考文献

- [1] S. Maekawa ed. *Concepts in Spin Electronics*, (Oxford, 2005).
- [2] F. Jedema, A. Filip, B. Van Wees, *Nature* **410**, 345–348(2001).
- [3] T. Sasaki *et al.*, *Applied Physics Express* **2**, 053003(2009).
- [4] R. Winkler, *Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems*, (Springer, 2003).
- [5] G. Dresselhaus, *Phys. Rev.* **100**, 580–586(1955).
- [6] E. Rashba, *Soviet Physics-Solid State* **2**, 1109–1122(1960).
- [7] Y. A. Bychkov, E. I. Rashba, *Journal of physics C: Solid state physics* **17**, 6039(1984).
- [8] A. D arr, J. Kotthaus, T. Ando, *Proc. 13th Int. Conf. Phys. Semidond.* p.774 (1976) .
- [9] J. Nitta *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1335–1338(1997).
- [10] M. Z. Hasan, C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045–3067(2010).

付録 J : 微小磁気モーメントの運動

J.1 磁場中の電子スピン

z 方向の静磁場 B_0 中の単一スピン s を考える。ゼーマンエネルギーのみ考え、

$$\mathcal{H} = (e\hbar/2m_0)gB_0\hat{s}_z = g\mu_B B_0\hat{s}_z$$

とする。 μ_B は**ボーア磁子** (Bohr magneton) である。スピン演算子の交換関係 $[\hat{s}_j, \hat{s}_k] = i\hat{s}_l/2$ ((j, k, l) は (x, y, z) のサイクリックな入れ替え). より、

$$[\mathcal{H}, \hat{s}_x] = ig\mu_B B_0\hat{s}_y, \quad [\mathcal{H}, \hat{s}_y] = -ig\mu_B B_0\hat{s}_x, \quad [\mathcal{H}, \hat{s}_z] = 0$$

であるから、ハイゼンベルク方程式より

$$\frac{\partial \langle s_x \rangle}{\partial t} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} B_0 \langle s_y \rangle, \quad \frac{\partial \langle s_y \rangle}{\partial t} = \frac{g\mu_B}{\hbar} B_0 \langle s_x \rangle, \quad \frac{\partial \langle s_z \rangle}{\partial t} = 0. \quad (\text{J.1})$$

$$\therefore \langle s_x \rangle = A \cos \omega_0 t, \quad \langle s_y \rangle = A \sin \omega_0 t, \quad \langle s_z \rangle = C, \quad \omega_0 = \frac{eg}{2m_0} B_0. \quad (\text{J.2})$$

ただし、 $A^2 + C^2 = s^2$ である。(J.2) は、**ラーモア振動数** (Larmor frequency) ω_0 での z 軸周りのすりこぎ運動(歳差運動)を示している。

xy 面内に回転磁場 $B_1(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t)$ を加えたとし、時間依存ハミルトニアンを

$$\mathcal{H}(t) = g\mu_B(B_1 \cos \omega t \hat{s}_x + B_1 \sin \omega t \hat{s}_y + B_0 \hat{s}_z)$$

と書く．スピン波動関数 $\chi(t) = u(t)|\uparrow\rangle + d(t)|\downarrow\rangle$ の時間発展は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = -g\mu_B \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

で表される．この連立微分方程式の解は， C を積分定数とし， $\omega_c = eB_1/m_0$ ， $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_c^2}$ と定義することで，

$$u(t) = C(\Omega \mp \omega_0 \pm \omega) e^{i(\pm\Omega - \omega)t/2}, \quad (\text{J.3a})$$

$$v(t) = \pm C \omega_c e^{i(\pm\Omega + \omega)t/2} \quad (\text{J.3b})$$

と書かれる．初期条件 $u(t) = 1$ ， $d(t) = 0$ を取ると，

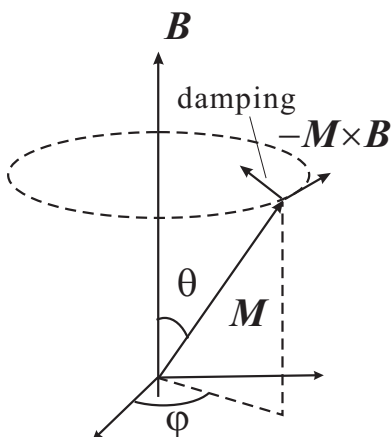
$$u(t) = \sqrt{2 - \frac{\omega_c^2}{\Omega^2}} \sin\left(\frac{\Omega t}{2} + \alpha\right) e^{-i\omega t/2}, \quad v(t) = \frac{\omega_c}{\Omega} \sin\frac{\Omega t}{2} e^{i\omega t/2},$$

ただし， $\alpha = \arctan(\Omega/(\omega - \omega_0))$ である．これより，

$$|d(t)|^2 = \frac{\omega_c^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_c^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \quad (\text{J.4})$$

となり， $\omega = \omega_0$ で振動数 $\Omega (= \omega_c)$ で振動し，その振幅はローレンツ型の共鳴を示すことがわかる．

J.2 LLG 方程式



運動方程式 (J.1) を，一般のマクロな磁気モーメント \mathbf{M} に対して適用すると，ランダウ-リフシッツ (Landau-Lifshitz) 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (\text{J.5})$$

を得る．これに，何らかの形で \mathbf{M} の緩和 \mathcal{R} が加わったと考えると次のようになる．

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{B} + \mathcal{R}. \quad (\text{J.6})$$

\mathcal{R} がどのような形の項か考える． \mathbf{M} は \mathbf{B} の方向が最も安定であるから，左図のように緩和はこの方向にかかる力と考えられる． $-\mathbf{M} \times \mathbf{B}$ と \mathbf{M} に垂直であるから， λ を定数として

$$\mathcal{R}_{LL} = -\lambda \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{B}) \quad (\text{J.7})$$

と推察することは自然である．これをランダウ-リフシッツ減衰項と呼ぶ．

これに対して，摩擦項のように，減衰率は \mathbf{M} の速さ-時間変化に比例するべきである，という考えもあり得る．時間変化 $\partial \mathbf{M} / \partial t$ は上の $-\mathbf{M} \times \mathbf{B}$ と同じ向きであるから，ランダウ-リフシッツ項と同様に向きを考えると， α を定数として，

$$\mathcal{R}_G = \alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (\text{J.8})$$

と書ける．これをギルバート減衰項と呼ぶ．この中の $\partial \mathbf{M} / \partial t$ に，減衰がない場合の運動方程式 (J.5) を代入すると，これはランダウ-リフシッツ項と一致する． \mathcal{R}_G を採用した

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{M} \times \mathbf{B} + \alpha \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (\text{J.9})$$

をランダウ-リフシッツ-ギルバート (LLG) 方程式 (Landau-Lifshitz-Gilbert equation) といい，磁化の運動を現象論的に記述するのに良く使用される．