

8.5.4 アハロノフ-ボーム リング

例として Aharonov-Bohm (AB) リングの透過率を考える。図のような伝導チャンネル構成とし、三叉路部分の S 行列を

$$S_t = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (8.51)$$

とする*1。AB 位相については、片側の経路に

$$S_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_{AB}} \\ e^{-i\theta_{AB}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \equiv 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} = \frac{e}{\hbar} \phi \quad (\phi \text{ はリングを貫く磁束。}) \quad (8.52)$$

という S 行列で表される導体を挿入し、またリングの両方の腕の行路差を表す S 行列

$$S_w = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_0} \\ e^{i\theta_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

を、反対側の経路に挿入する。磁場なしの行路差による位相シフト θ_0 は伝播方向によらないのに対し、 θ_{AB} は向きにより反転し、この導体のオンサガー相反性(??)は、これによって満たされる。

以上の合成 S 行列より、リング全体の複素透過率は

$$t = \frac{4 \sin \theta_0}{1 + e^{i\theta_{AB}} (e^{i\theta_{AB}} + e^{i\theta_0} - 3e^{-i\theta_0})} \quad (8.54)$$

と得られる [3]。透過率(??)より伝導度 $T = |t|^2$ は磁束 ϕ に対して、図 8.19(b) のように ϕ_0 周期の AB 振動をしている。 θ_0 を変化させても、同様に 2π 周期の振動をしている。 $|t|^2$ は $\phi = 0$ 軸に対して対称であり、S 行列 (8.52) に対して導入した Onsager 相反性により、(8.54) にも相反性が成立した結果である。周期 ϕ_0 の振動に着目すると、その振動位相は θ_0 に対して π を振幅とする矩形波状に変化し、位相がジャンプする付近では振幅がなくなる。磁気抵抗振動が消失するわけではなく、 $\phi_0/2$ 周期を始め、高調波成分は振幅が大きくなる。このように、 θ_0 の連続変化に対して ϕ_0 周期成分の位相が 0 か π しか取り得ないことを AB 振動位相の固定 (phase rigidity) と呼ぶ [4]。位相の固定があるため、AB リングに量子ドットを埋め込んだ系で AB 振動を測定しても振動位相からドットでの位相シフトを検出することはできないことになる*2。

8.6 量子輸送と統計性

半導体中の輸送現象としては、電子（電荷およびスピン）の輸送を考えることが多いが、輸送を担う準粒子には電子とは異なる振舞いをするものもある。これまで見た量子輸送論をどのように適用するか（適用できないか）考えておこう。

*1 良く採用される形だが、完全な対称形であるためどちらかというとやや特殊である。

*2 複数伝導チャンネルを考え、更に磁場領域を限ると、これが破れて位相シフトが連続的に発生するようになることがある [5]。Onsager 相反性が破れるわけではない。

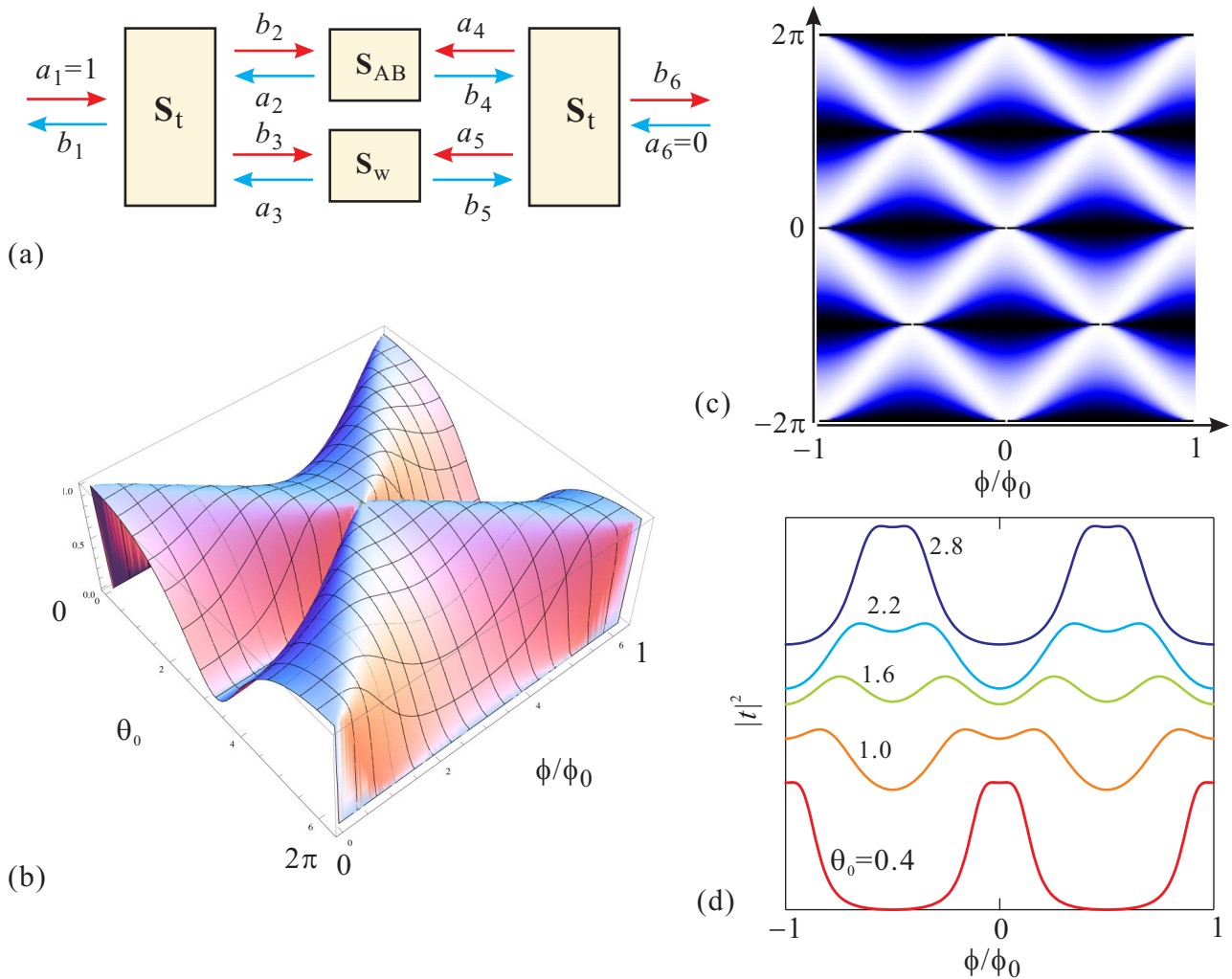


図 8.19 (a) AB リングの S 行列モデル. (b) 式 (8.54) から計算された AB リングの透過率 $|t|^2$ を行路差を位相で表したもの (θ_0) とリングを貫く磁束 ϕ/ϕ_0 の関数としてプロットした. (c) (b) と同じ計算結果を、やや広い領域で 2 次元カラープロットしたもの. (d) やはり同じ透過率を、細線部の位相シフトのいくつかの値に対して、 ϕ/ϕ_0 の関数として描いた. ϕ_0 周期の AB 振動は $\theta_0 = 1.6$ 付近で一旦消え、振動が反転、すなわち位相が π だけ飛躍することがわかる.

8.6.1 バンチング・アンチバンチング

前節で、半導体量子構造中の電気伝導を扱うために Landauer 公式を導入した. 電子の伝導を前提としており、その導出には単位電荷およびフェルミ分布が使用されていた. 従って、これは化学ポテンシャルの異なるフェルミ粒子系を量子細線で接続した際にどれだけの粒子流が流れるかを考えたものと言うことができる. 一方、Landauer 公式中にある透過係数 T_{ij} を計算するために、T 行列、S 行列形式を導入したが、これ自身は、波の透過や反射を考えるだけで、統計性とは直接関係しておらず、フェルミ粒子系でなくても適用できると考えられる.

同種ボース粒子・フェルミ粒子のバンチング・アンチバンチングについて初等的なところを見ておくと、同種 2 粒子の波動関数は座標表示で

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\mathbf{r}_1)\phi_2(\mathbf{r}_2) \pm \phi_1(\mathbf{r}_2)\phi_2(\mathbf{r}_1)] \quad (8.55)$$

と書くことができる. 複号は + がボソン、- がフェルミオンに相当する. 図 8.20(a) に $\phi_{1,2}(\mathbf{r})$ として、空間的に一部オーバーラップを持つガウス分布的なものを考え、この場合に、式 (8.55) で表される 2 粒子の波動関数が、2 粒子の相対位置に対してどのような存在確率密度を与えるかを模式的に示したのが図 8.20(b) である. (8.55) で $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$

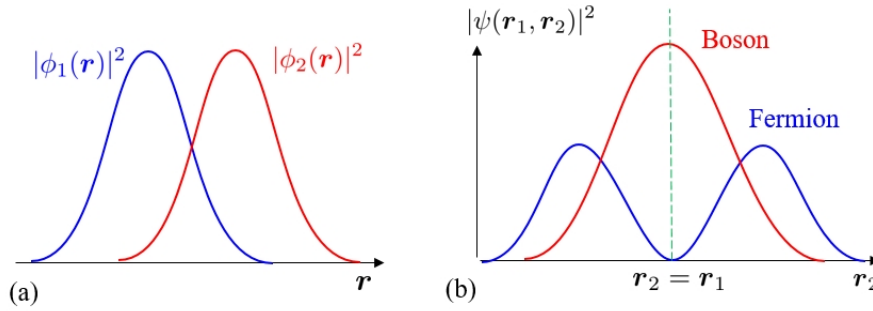


図 8.20 (a) 一粒子の波動関数で表される確率密度の座標表示 $|\phi_1(\mathbf{r})|^2$, $|\phi_2(\mathbf{r})|^2$ を模式的に描いたもの. 空間的に一部の重なりがある場合. (b)(a) の場合に, 粒子 1 の座標 \mathbf{r}_1 を基準に取り, 粒子 2 の座標 \mathbf{r}_2 に対して (8.55) の ψ で与えられる粒子 2 の空間存在確率密度を模式的に描いたもの.

と置いてみればすぐわかるように, ボソン, フェルミオンの場合, それぞれ,

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)|^2 = \begin{cases} 2|\phi_1(\mathbf{r}_1)|^2|\phi_2(\mathbf{r}_1)|^2 & (\text{boson}), \\ 0 & (\text{fermion}) \end{cases} \quad (8.56)$$

となって, ボソンでは存在確率が一粒子の場合の 2 倍, フェルミオンでは 0 となる. これは, ボソンは粒子同士が接近して固まるバンチングが生じるのに対し, フェルミオンでは粒子同士が避けあうアンチバンチングが生じることを示している.

Landauer 公式の元となった (8.3)~(8.5) の考察は, このアンチバンチングを使っても理解することができる. すなわち, 1 次元系につながった電子溜め間の化学ポテンシャル差が eV であった場合, 電子を一方に流すための波束構成に使用できる固有状態のエネルギー幅がこの程度 $\Delta E \sim eV$ である. この波束が空間の一点を通過するのに必要な時間は, 不確定性より $\Delta t = h/\Delta E = h/eV$ である. アンチバンチングすなわちフェルミオンの統計性により, この波束 1 個に電子 1 個 (スピンを考慮すれば 2 個) が収容できるから, この 1 次元系を流れる電流は $J = e/\Delta t = (e^2/h)V$ (スピンを考慮して $(2e^2/h)V$ となって同じ結果を与える).

以上の理解は, ある意味単なる言い換えであるが, 量子細線上の電子の流れを考える上で重要な示唆を与える. 量子細線で伝導度が量子化している時, 上記の h/eV という時間間隔で電子は流れるため付録 8A のショット雑音の項にあるように, 「規則正しいデルタ関数」の場合となり, ショット雑音はゼロとなる. Landauer の議論では, 伝導度の量子化はフェルミオンのアンチバンチングの帰結であったが, ショット雑音からそれが確認できる可能性がある, ということになる. 透過率 \mathcal{T} が 1 以下で, 一部の電子が反射される量子細線にも拡張すると, $G = \mathcal{T}G_q$ である. この時, 「用意できたにもかかわらず電子が反射により占有されなかった」波束状態が一部生じ, これは確率過程であるためショット雑音となる. これは, 整然とした波束列を, 確率 \mathcal{T} で電子, $1 - \mathcal{T}$ で正孔が占めていると見ることができる. 電子, 正孔が同種間では区別のできない粒子であることを考えると, 空席が取り得る場合の数, すなわち乱雑さの程度は $\mathcal{T}(1 - \mathcal{T})$ に比例する. $\mathcal{T} \rightarrow 0$ では, (8A.3) と同形になり, 電圧を V として $J = 2\mathcal{T}G_qV$ となる (スピン自由度 2 を考慮) ことを考えると, 雑音パワースペクトルは

$$S \equiv \frac{\langle (\delta J)^2 \rangle}{\Delta f} = 2e \frac{2e^2}{h} V \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}) \quad (8.57)$$

と書くことができる [?]. これは, (8A.3) の S_{Poisson} に比べて, 因子 $1 - \mathcal{T}$ だけ雑音が抑えられている. 一般に, 分散の平均値に対する比をファノ因子 (Fano factor) と呼ぶが, 今の場合はショット雑音のポアソン雑音に対する比で, $1 - \mathcal{T}$ となっている.

図 8.21 に測定例を示した. 伝導度の変化 (a) に対して, 伝導度プラトーの中央付近, これを挟む遷移領域の 3 点で QPC 電圧に対して電流雑音 (ゆらぎの 2 乗の周波数密度) を測定したものが (b) である. 遷移領域では, 電圧に対して雑音が増大し, ショット雑音が生じていることがわかるが, プラトー中央では電圧に対する雑音増大は非常に小さく, 雑音が抑えられていることがわかる. 伝導度に対するファノ因子の形にプロットしたのが (c) で, 青線で示

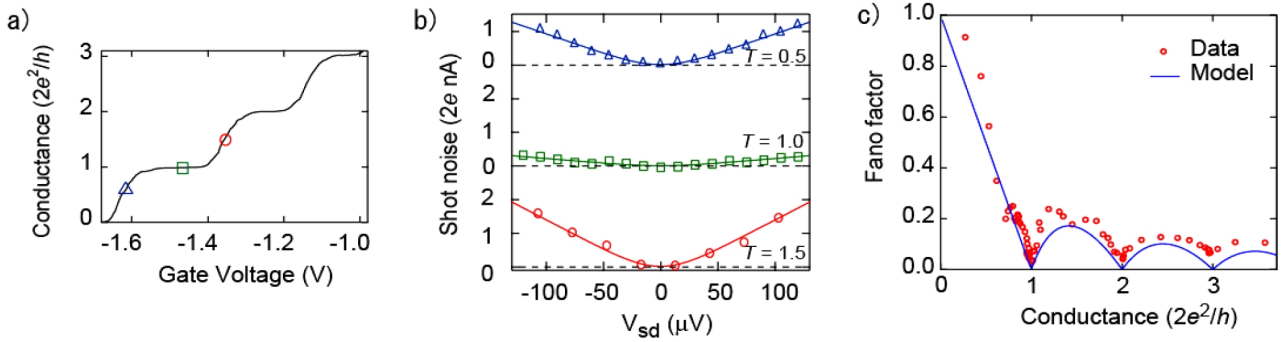


図 8.21 QPC の伝導度量子化プラトーおよびその周囲で測定したショット雑音. (a) 伝導度量子化の様子. (b) (a) 中に示した 3 点で測定したショット雑音. (c) ファノ因子を QPC 伝導度に対してプロットしたもの. 青線は、ファノ因子が $1 - T$ になるという簡単なモデルから得られるもの. [6] より.

したファノ因子が $1 - T$ になるという簡単なモデルで概ね説明できることがわかる.

8.6.2 励起子ポラリトンの輸送現象

ボース統計に従う準粒子として、4.4.2 節で導入した励起子ポラリトン (exciton-polariton, E-P) を取り上げる. 励起子ポラリトンは、光 (電磁場) と物質との強い相互作用により、光と励起子が混じった準粒子である. 励起子はフェルミオンの対であるためボース統計に従うが、式 (3.33) にあるように、その有効質量は電子と正孔の有効質量を合わせた $m_e + m_h$ となる. 一方、励起子ポラリトンは、図 4.7 の分散関係からもわかるように、光の質量ゼロを反映して $k \approx 0$ 付近では有効質量が極めて小さい. このため、光子場によって位相制御を行うことが可能になり、光回路への応用研究が行われている. また、BEC の臨界温度 (8B.10) が非常に高くなる可能性があり、実際、BEC を観測した、という報告がなされている.

8.6.2.1 共振器励起子ポラリトン

E-P を安定して伝播させるために使用されるのが、レーザーダイオードの項で出てきた 2 次元的な共振器を更に細く加工して伝送路とした図 8.22(a) のような構造である. ここでは、GaAs を量子井戸としてこれを GaAs/AlGaAs の超格子 (SL) で挟み、更に外側に GaAs のクラッド層を配置した構造をしている. GaAs に比べて SL 部分は有効屈折率が低く、光子はこの部分に閉じ込められる. 一方、励起子は、SL 部分がバンド不連続により障壁として働くので、中央の GaAs 量子井戸に閉じ込められる. この時、2 次元励起子となって相対的に束縛エネルギーが大きくなり安定することは 7.1.3 節で見たとおりである. 以上の仕掛けにより、励起子ポラリトンを伝播させることができるが、そのためには一定の低温環境が必要である. その温度の目安は、図 8.22(c) の分散関係で、上側の枝と下側の枝の間のギャップに相当し、図 8.22 のような系でも窒素温度を超える可能性がある.

図 4.7 の分散は、物質中光子と励起子によるものであったが、このような E-P 導波路では、光子はマイクロキャビティに強く閉じ込められているため、分散が変化する. 図 8.22(c) は、光子のキャビティモードと励起子の分散との間に相互作用による準位間反交差 (avoided crossing) が生じることを示している. ただし、このキャビティは図 8.24 にあるものである.

図 8.23 左図は、図 8.22(a) の共振器伝送路を用いた、Mach-Zehnder (MZ) 型干渉計デバイスの概念図である. 励起子の項でも述べたように、電子正孔で電場に対する応答が逆であるため、完全に一体の複合粒子としてみれば電場の影響が現れにくい、図 8.22(a) の構造を用いて励起子の束縛エネルギーを変化させることで、有効な運動エネルギーを通して波数が

$$\Delta\varphi = L \left[\frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar} - \frac{\sqrt{2m(E_k - \delta E)}}{\hbar} \right] \quad (8.58)$$

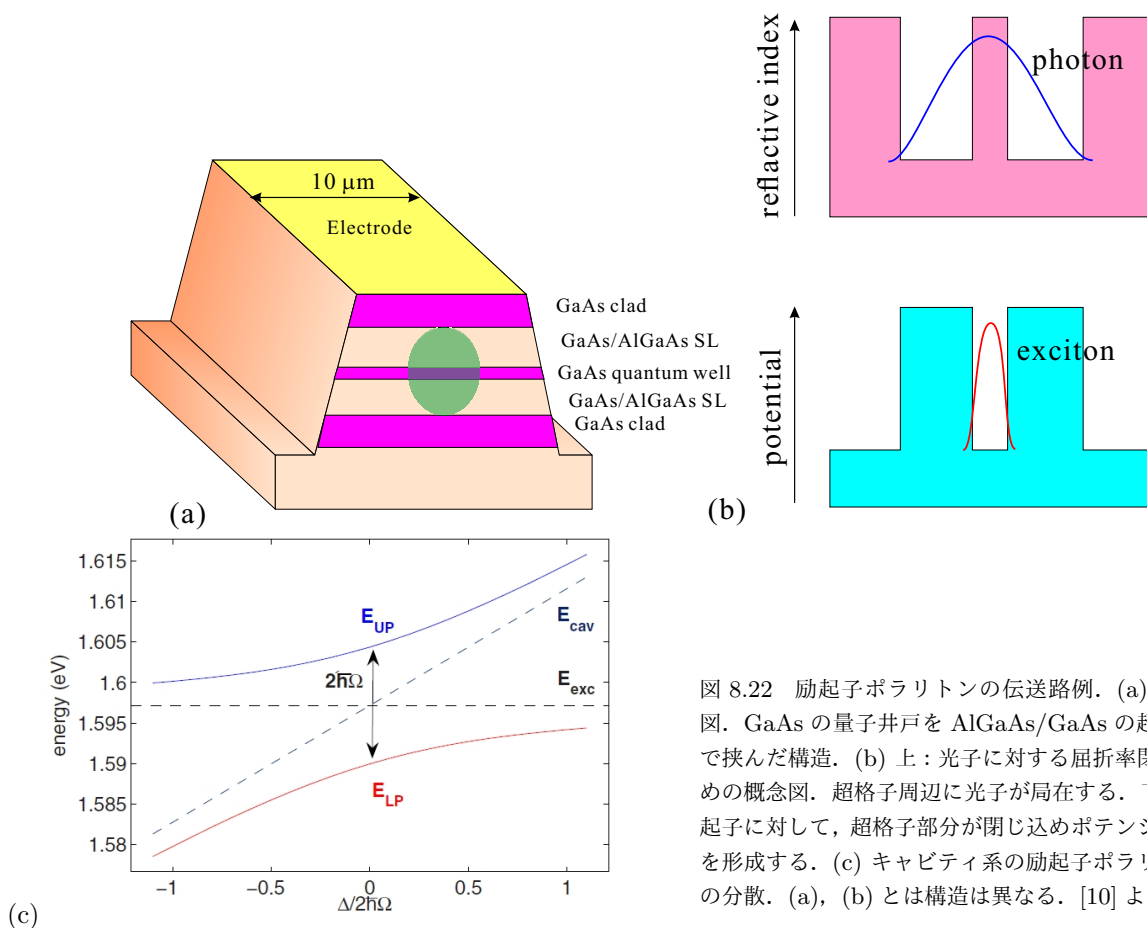


図 8.22 励起子ポラリトンの伝送路例. (a) 断面図. GaAs の量子井戸を AlGaAs/GaAs の超格子で挟んだ構造. (b) 上: 光子に対する屈折率閉じ込めの概念図. 超格子周辺に光子が局在する. 下: 励起子に対して, 超格子部分が閉じ込めポテンシャルを形成する. (c) キャビティ系の励起子ポラリトンの分散. (a), (b) とは構造は異なる. [10] より.

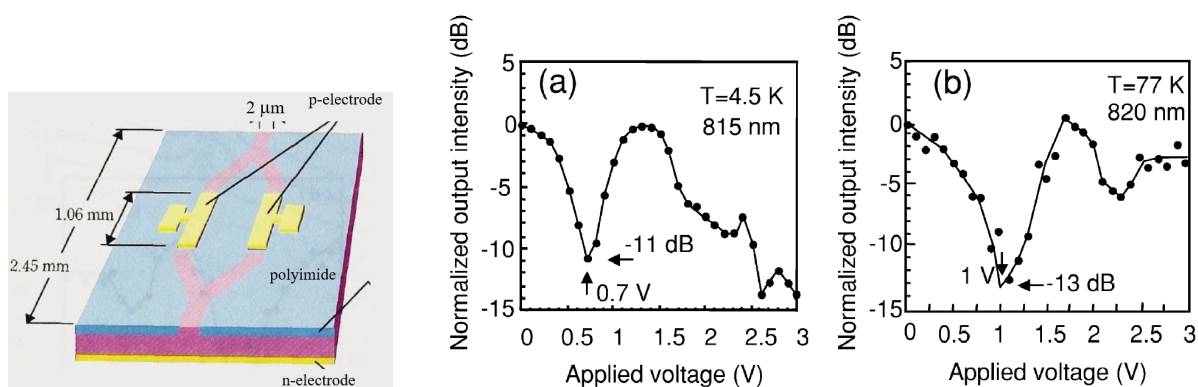


図 8.23 左: 励起子ポラリトンの Mach-Zehnder(MZ) 型干渉計デバイスの概念図. (a) ゲート電圧に対する, MZ 干渉デバイスの出力変化 (4.5 K). (b) 同, 77 K.

のように変化する. δE は, 上記有効運動エネルギーの変化を代表させたもので, L はゲート領域の距離である. これによって, 図 8.23 左図のような 2 経路回路では, 2 経路の干渉効果によって, 出力が変化する. 最終的には素子端から光子になって放出されるため, 出力光強度として検出することができる.

図 8.23 の回路は, MZ 干渉計ということになっているが, 出力が 1 経路しかないため, 合流点での反射波が存在し, どちらかと言えば, 2 端子 AB 型干渉計 (今, AB 位相はつけることができないので, リング型というべきかもしれない) というべきものである. 図 8.23(a), (b) にあるように, ゲートに印可した電圧によって, 光出力を 10 dB 以上抑制することができ, 電圧-光スイッチ機能が実現されている.

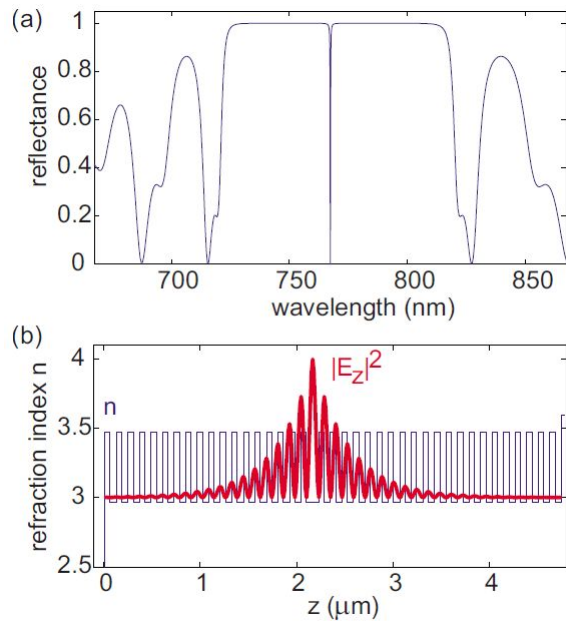
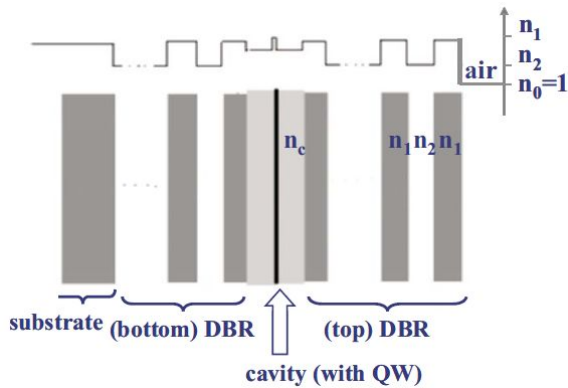


図 8.24 左：励起子ポラリトン凝縮を観測するために用いられた導波路共振器の模式図。上は屈折率。右：(a) 左のキャビティの反射率を計算したもの。(b) 共振器の屈折率の図と、(a) で中心付近の鋭い共鳴透過を示す局在モードの z 方向電場分布を赤線で描いたもの。[10] より。

8.6.2.2 励起子ポラリトンの凝縮

以上見たように、量子回路を流れるフェルミオンの代表である電子に対してマイクロ共振器中の E-P はボソンの量子回路を実験することができる系であると言える。フェルミ統計の量子回路を流れるフェルミオン流に対する帰結が伝導度の量子化であった。これに対して、ボソン統計の場合は、8.6.1 節で見たように、粒子のバンチングが生じるのが特徴で、その帰結として、ボース・アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein condensation, BEC) あるいは、その類似現象が存在する。レーザー発振現象のもととなった誘導放出も、ボソンのバンチングと類似現象であり、キャビティ中のレーザー光は一種の凝縮状態と考えられなくもない。しかし、誘導放出は非平衡開放系の現象であり、BEC は熱平衡系の現象であるので、その点は区別する必要がある [8, 9]。

図 8.24 は、BEC の観測のために使用されるキャビティの屈折率分布、また、中央付近に局在するモードの z 方向電場エネルギー密度の分布を描いたもので、電子伝播の計算にも用いた T 行列法を用いて計算されたものである。このように、T 行列、S 行列は、フォトニック結晶など様々な波動伝播問題に使用される。

3次元理想気体の BEC については、付録 8B に簡単にまとめた。式 (8B.10) の臨界温度 T_c の式からわかるように、粒子の質量が軽いほど、また、粒子密度が高いほど T_c は高くなる。逆に、質量、温度が決まっていれば、BEC を起こすための臨界粒子密度が定義されることになる。図 8.25(a) は、キャビティ系へのレーザー照射によって BEC が生じるプロセスを模式的に示したものである。プロセスの初期にはレーザーパルスによって、エネルギーの高い E-P が多数励起される。これらは、フォノン系にエネルギー放出し、「冷却」される。レーザーパルス強度がしきい値 P_{th} より高いと、冷却に伴い、BEC を生じて最低エネルギー状態に多数の E-P が落ち込む。図 8.25(b) は、この様子を、キャビティからの漏洩光により測定したものである。

ここで注意しておかなければならないのは、この E-P 系は 2次元面内への閉じ込めモードであるため、付録 8B の 3次元の BEC は適用できないことである。2次元以下の空間次元においては、Mermin-Wagner の定理 [11] にあるように、無限遠までコヒーレンスが続くような長距離秩序は生じない。代わって Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) 転移が生じて距離のべきで減衰するような秩序が生じる [12]。実際に、BKT 転移を示す、渦対の発生なども観測されている。その他、E-P 系の BEC では非常に多くの現象が観測され、理論・実験共に盛んに研究が進められ

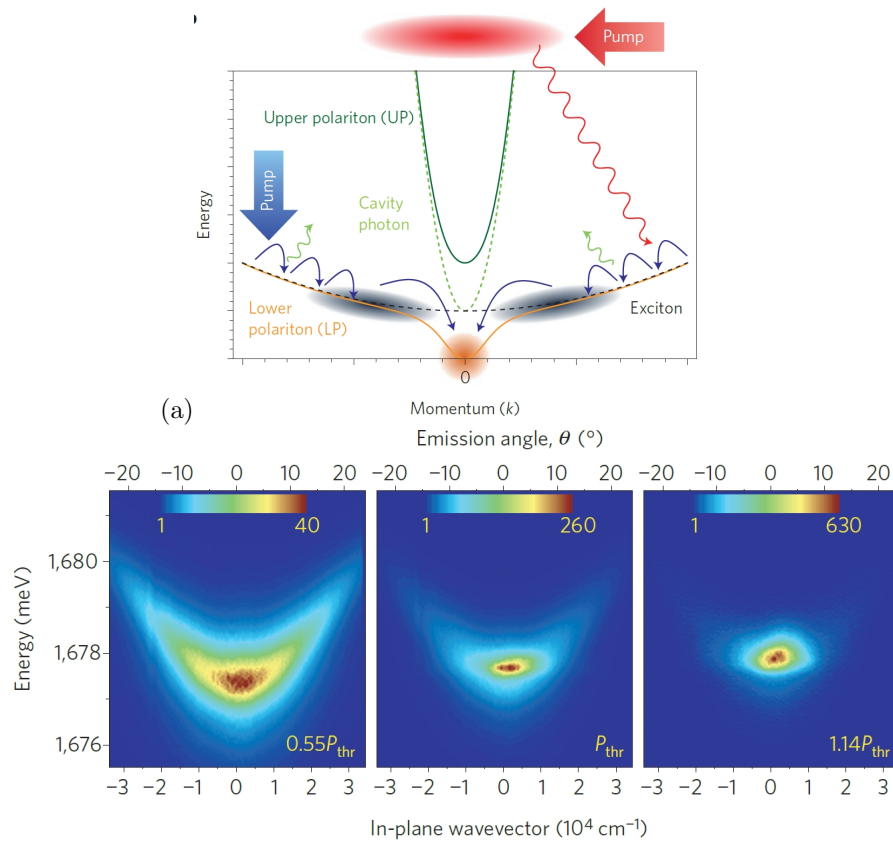


図 8.25 (a) マイクロ共振器励起子ポラリトンが BEC を生じる「冷却」過程を示す概念図。(b) 光学的に実測した分散関係空間内の E-P の分布。 P_{th} は、BEC を起こすための密度を実現する励起パワー。 [9] より。

ている。

付録 7A : レーザダイオードと導波路

レーザダイオード (laser diode, LD) の特に導波路構造について簡単に補足しておく。図のようなファブリ-ペロー型の LD を考え、導波路 (共振器) 長を L とする。共振条件は、 m_j を整数、 \bar{n} を屈折率、 λ を真空中波長として

$$m_j \frac{\lambda}{\bar{n}} = 2L \quad (7A.1)$$

である。従って、共振条件を満たす波長間隔および周波数間隔は

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L\bar{n}}, \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L\bar{n}} \quad (7A.2)$$

である。通常 $\lambda \ll L$ であるから、キャリア注入が多い状態では発光波長領域がかなり広いことを考えると、通常 L を精確に決める必要はなく、適当な波長を中心にマルチモードで発振する。

上では、光強度変化を単に $I_0 \exp(-\alpha'z)$ と書いたが、 α' の内容を、光学利得 g と物質固有の吸収係数 α を使って、 $I(z) = I_0 \exp((g - \alpha)z)$ と書く。2つの鏡の反射率をそれぞれ R_1 、 R_2 とすると、増幅が生じるための条件は

$$R_1 R_2 \exp[(g - \alpha)2L] > 1$$

である。これより、全体として増幅が生じる閾値光学利得 g_{th} は

$$g_{th} = \alpha + \frac{1}{L} \ln \left(\frac{1}{R_1 R_2} \right) \quad (7A.3)$$

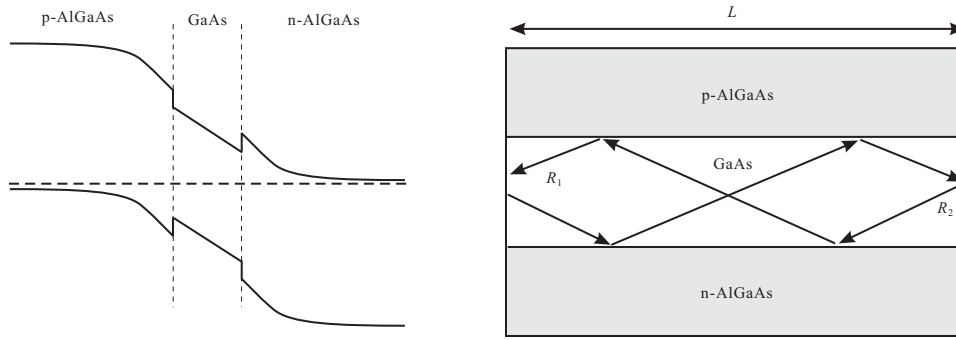


図 7A.1 左: 活性層にドーピング無しの GaAs, ドーピング層にそれよりもエネルギーギャップの大きな AlGaAs を使用した, LD 用 pn 接合の模式図. 右: 基板の端を劈開して半透過鏡にすることで GaAs 活性層を共鳴器構造とする.

である.

p, n 層は同じ物質 (屈折率 \bar{n}_1) とし, 活性 i 層の屈折率は \bar{n}_2 で, \bar{n}_1 よりも大きいとする. z 軸を図のように取り, z 軸方向へ伝播する電磁波を考える. モードとして TE (transverse electric), すなわち, z 方向の電場がない ($\mathcal{E}_z = 0$) とする. また, y 方向へは一様とする. 以上の簡単化により, 電場は y 方向のみ考えればよく,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathcal{E}_y = 0. \quad (7A.4)$$

ここで, 透磁率は半導体中でも真空中とほとんど変化がないため, μ_0 とした.

導波路として考え, x 方向には定在波, z 方向には伝播する解を考えると, 活性層内 ($|x| \leq d/2$) で,

$$\mathcal{E}_y(x, z, t) = A \cos(\kappa x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7A.5)$$

が得られる. ただし,

$$\kappa^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \beta^2 = \bar{n}_2^2 k_0^2 - \beta^2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c^* \bar{n}_2}. \quad (7A.6)$$

一方, 活性層外 ($|x| > d/2$) では, $|x| \rightarrow \infty$ に対して減衰する波になるはずであるから, $x = \pm d/2$ での \mathcal{E}_y の値の接続を考えると,

$$\mathcal{E}_y(x, z, t) = A \cos\left(\frac{\kappa d}{2}\right) \exp\left[-\gamma\left(|x| - \frac{d}{2}\right)\right] \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7A.7)$$

となる. (7A.4) を満たすため,

$$\gamma^2 = \beta^2 - \bar{n}_1^2 k_0^2 \quad (7A.8)$$

である. また, Maxwell 方程式より, 磁場の z 方向成分が $x = \pm d/2$ で連続となるためには

$$\tan\left(\frac{\kappa d}{2}\right) = \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \bar{n}_1^2 k_0^2}}{\sqrt{\bar{n}_2^2 k_0^2 - \beta^2}}. \quad (7A.9)$$

以上より, κ , γ , β が決定される. 量子井戸の計算などと同様, 正接 (tangent) は π 周期の関数であるから, 解は多数存在し, それぞれが, 離散モードを形成する.

付録 8A : ショット雑音

我々は情報を物理量の時間変化として表現し, 様々な輸送現象を用いて伝送する. 物理量は常に何らかのゆらぎを伴っており, 特に時間変化するものを雑音 (noise) と呼ぶ^{*3}. 雑音には, 信号伝送路に外部より混入する外部雑音と,

^{*3} ゆらぎとは, 複数回の同一測定に対して生じる測定値の分布の事であり, 測定対象のサンプリングのパラメーターは時間とは限らない. 同一方法で準備した複数の試料間の測定値の違いもゆらぎの一種である.

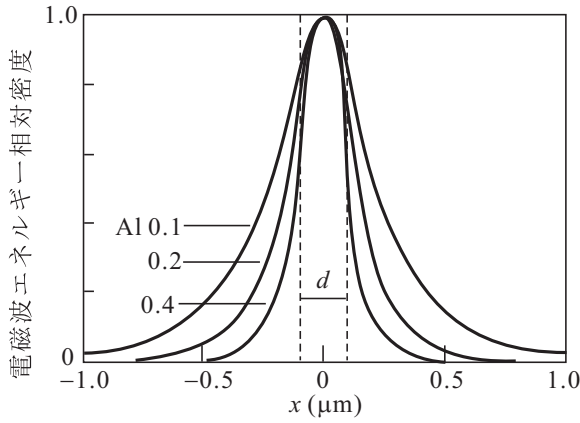


図 7A.2 p, n 層に (Al,Ga)As, 活性 i 層に GaAs を使用し, d として $0.2\mu\text{m}$ を用いた場合の基本モードの電磁場エネルギー分布. Al 組成 0.1, 0.2, 0.4 の場合について描いている.

物理量自身に内在する内部雑音 (intrinsic noise) があり, 特に電子電流においては, 電子のランダムな熱運動に起因する熱雑音 (thermal noise) (Johnson-Nyquist 雑音) と電子の粒子性とその流れの乱雑性に起因するショット雑音とがその代表である.

時刻 t_p に測定される 1 個の電子による電流 $J_p(t) = e\delta(t - t_p)$ を考えると,

$$J_p(t) = e \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2\pi i f(t - t_p)] df = 2e \int_0^{\infty} \cos[2\pi f(t - t_p)] df \quad (8A.1)$$

となり, 周波数によらない一様な振幅 $2e$ を有している. ある周波数 f の df 幅につき, 時間 1 周期について平均 $\langle \dots \rangle$ を取ると, (8A.1) の被積分関数を j_p と書いて, 電流揺らぎは $\delta J_p = \sqrt{\langle j_p^2 \rangle} df = \sqrt{2e} df$ である. 次に t_p, t_q の 2 個の電子電流 $J_{pq} = e[\delta(t - t_p) + \delta(t - t_q)]$ で考える. (8A.1) と同様に, Fourier 逆変換の形で J_{pq} を表したとすると, 2 つのデルタ関数を表すための 2 つの指数関数間に位相差 $\phi = f(t_q - t_p)$ があるから, 被積分関数の 2 乗を取る際に

$$j_{pq}^2 = j_p^2 + j_q^2 + 2j_p j_q \cos \phi \quad (8A.2)$$

と最後に干渉項が付く. しかし, $t_q - t_p$ をランダム変数とした 2 電子電流を多数用意して平均 (\dots で表す) すれば干渉項は消え, $\overline{j_{pq}^2} = 2(\sqrt{2e})^2$ となる. 多数のランダムな電子による電流は, この多数のサンプリングと等価であるから, 単位時間当たり平均 N 電子の電流とすれば, 平均電流 $J = eN$ であるから, 電気通信系の記法に習い, 帯域 Δf に対する電流揺らぎは

$$\langle (\delta J)^2 \rangle / \Delta f (\equiv S_{\text{Poisson}}) = N \times 2e^2 = 2eJ \quad (8A.3)$$

となる. 電流揺らぎの 2 乗が電流平均値に比例するのは, ポアソン分布の分散が平均値 (単位時間当たり電子数 N) に等しくなることによる. 特にこの完全にランダムな場合をポアソン雑音と呼ぶ.

一方, 電子が等間隔で流れてきた場合には, 電流のゆらぎはない (サンプリングのタイミング等により, 電荷に直して e だけの変化はあるが, これもランダムな変化ではない). 実際, 間隔 τ のデルタ関数列を $\delta_\tau(t)$ と書くと, 周期 τ の周期関数であることから, 区間 $[-\pi/\tau, \pi/\tau]$ のフーリエ級数展開ができる.

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-in \frac{2\pi}{\tau} t\right). \quad (8A.4)$$

したがって, そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta_\tau(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(2\pi/\tau)t} \right] e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\omega - n \frac{2\pi}{\tau}\right)t\right] dt \\ &= \frac{2\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\tau}\right) = \frac{2\pi}{\tau} \delta_{2\pi/\tau}(\omega) \end{aligned} \quad (8A.5)$$

となって, ω 空間でもデルタ関数列になり, ランダムな変化の条件である連続スペクトルが現れない. すなわち, ショット雑音が消失していることがわかる.

付録 8B : ボース・アインシュタイン凝縮

Bose-Einstein Condensation (BEC) ^{*4}: 自由度間の相互作用によらない相転移 (量子統計力学的相転移) と呼ばれている。

相互作用による相転移は直感的にわかり易い面があるが, 相転移は必ずしも相互作用を要するものではなく, 様々な要因のせめぎ合いによって「相」の変化が起こることがある。その代表が BEC である。

ボース系の場合, 粒子間の力に相当する相互作用は存在しないにもかかわらず, その統計的な性質から同じ状態にできるだけ多数の同種粒子が入ろう, とする傾向が生じる。2 粒子の場合について考えてみよう。2 粒子系の場合波動方程式の解を $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ とすると, 系の波動関数 $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)] \quad (8B.1)$$

と対称化される。したがって, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ が得られる確率は

$$|\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = \frac{1}{2} [|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)|^2 + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^* \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)^*] \quad (8B.2)$$

となって, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ という条件に対して, 後半の 2 つの干渉項が強調する効果を持つことがわかる。低温で $\lambda \sim l$ となったとき, 結局この傾向を満足するためには $k = 0$ の状態に粒子が入り込む必要があることから BEC が発生する。

$$E_k = \frac{p^2}{2M} = k_B T : \text{Bose 統計}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &\sim \sqrt{M k_B T} \\ \therefore \lambda &= \frac{h}{\Delta p} \sim \frac{h}{\sqrt{M k_B T}} \end{aligned} \quad (8B.3)$$

すなわち, 温度が下がると系を代表するドブロイ (de Brogli) 波長は \sqrt{T} に反比例して長くなる。波動関数の空間的なオーバーラップが大きくなると, 同種粒子はお互いに区別がつかなくなり, 全系の波動関数は粒子の交換に対して対称 (Boson) になろうとする。結果, ある温度を境として, 位相空間 (\mathbf{r}, \mathbf{p}) 内での凝縮が起こる。これが BEC である。

8B.1 理想気体のボース・アインシュタイン凝縮

spin 0 の理想 Bose 気体を考える。Bose 分布

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} \quad (\beta \equiv (k_B T)^{-1}) \quad (8B.4)$$

で, $\mu = 0$ を次のように定義しよう。 $T = 0$ では (8B.4) より基底状態にすべての粒子が落ち込む。そこで,

$$\mu(T = 0) = 0 \quad (8B.5)$$

とする。有限温度では, 系の粒子数を N とすると,

$$N = \sum_i f(\epsilon_i)$$

であるから,

$$N \rightarrow \int f(\epsilon) \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon \quad (?)$$

^{*4} BEC という略記は, Bose-Einstein Condensation と Bose-Einstein Condensate (ボース・アインシュタイン凝縮体) の両方に使われる。紛らわしいようだが, 使ってみるとそれ程混乱することはない。

としたいところである。この時、基底状態の粒子数 N_0 は

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\mu\beta} - 1} \sim \frac{1}{-\mu\beta} = -\frac{k_B T}{\mu} \rightarrow \mu \sim -\frac{k_B T}{N_0} \quad (8B.6)$$

となるはずである。この線に沿って計算すると、3次元理想気体では、

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{より} \quad \mathcal{D}(\epsilon) = \frac{m^{3/2} V}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sqrt{\epsilon} \quad (8B.7)$$

であるから、

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon = \frac{(m k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} V \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\alpha} - 1} dx \quad (8B.8)$$

である。ただし、 $x \equiv \epsilon\beta$ 、 $\alpha \equiv \mu\beta$ とした。ここで、定積分の部分を $I(\alpha)$ と書くことにすると、 I は

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sim 2.6 \quad (8B.9)$$

で、 $\alpha < 0$ に対して、 α の絶対値が大きくなると減少する関数である。したがって、 $T \rightarrow 0$ で (8B.8) の N のとり得る最大値はどんどん小さくなってしまい、数え落としているものがあるのは明らかである。もちろん、これが基底状態に落ち込むマクロな粒子数である。

(8B.8) から

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}{(m k_B T)^{3/2}} \frac{N}{V}$$

であるから、これが、(8B.9) を超える低温で異常（基底状態の粒子数増加）が起こる。この臨界温度 T_c は

$$T < T_c \equiv \frac{2\pi \hbar^2}{m k_B} \left[\frac{N}{\zeta(3/2)V} \right]^{2/3} \quad (8B.10)$$

と見積もられる。

ここで、 $l \equiv (V/N)^{1/3}$ は粒子間の平均距離であるから、(8B.10) は数係数を無視すると、

$$l = \frac{h}{\zeta(3/2)\sqrt{2\pi m k_B T_c}} \sim \lambda(T = T_c) \quad (8B.11)$$

である。すなわち、Bose-Einstein 凝縮は、平均の de Broglie 波長が粒子の平均間隔程度になった時に起こることがわかる。

T_c 以下では、基底状態の粒子数 N_0 を入れて

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon + N_0 \quad (8B.12)$$

とする。(8B.6) より、 $T < T_c$ では N_0 がマクロな数となるため $\mu = 0$ である。したがって、

$$N_0 = N - \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\epsilon\beta} - 1} d\epsilon = N \left[1 - \frac{V}{N} \frac{(m k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} I(0) \right] = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \quad (8B.13)$$

ちょうど、強磁性転移で転移点以下で自発磁化が急速に有限の値を獲得するのと同じである。

$T < T_c$ で系の全エネルギーを計算する。

$$E = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (8B.14)$$

$$\text{ここで } T < T_c \text{ では } \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \text{ より}$$

$$E = \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} V (k_B T)^{5/2} \quad (8B.15)$$

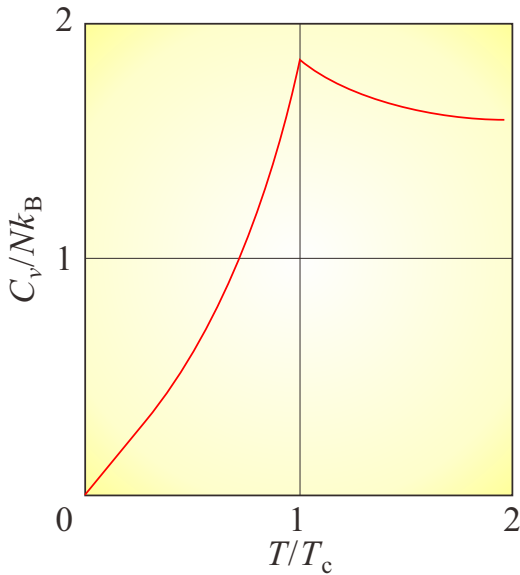


図 8B.1 理想ボース気体の定積比熱の温度依存性. T_c はボース・アインシュタイン凝縮の転移温度.

これより, 定積熱容量は

$$C_v = \frac{15}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} V k_B^{5/2} T^{3/2} \quad (8B.16)$$

となる.

C_v は T_c でカuspを示し, これが相転移であることを示している.

8B.2 ボース誘導

すでに, 8.6.1 節で 2 粒子について述べたことと本質的に同じであるが, BEC やレーザー発振などで, あたかも「駆動力」のような役割を果たしているボース誘導 (bosonic stimulation) について, N 粒子について見ておこう. ボース粒子系で, 1 粒子状態 φ_{ini} にある粒子が摂動を受けて別の 1 粒子状態 φ_{fin} に遷移する過程を考える. φ_{fin} がすでに N 個の粒子で占有されている場合, 遷移確率は φ_{fin} がまったく空の場合に比べてどうなるか, が問題である. 始状態を

$$\psi_+^{(i)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N+1}) = \frac{1}{\sqrt{(N+1)N! \prod_l n_l!}} \prod_{m=1}^N \hat{R}_{m,N+1} \det^{(+)}\{\varphi_i(\mathbf{r}_j)\} \varphi_{\text{ini}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (8B.17)$$

と表す. $\det^{(+)}$ は, 行列式の各項の符号をすべて + にしたもので, パーマネントと呼ばれる. 終状態 $\psi_+^{(f)}$ は φ_{ini} を φ_{fin} と交換することで得られる. 摂動ハミルトニアン \hat{H}_1 の行列要素を $\langle \varphi_{\text{fin}} | \hat{H}_1 | \varphi_{\text{ini}} \rangle = a$ とする.

φ_i ($i \leq N$) が φ_{fin} と直交しているとする, $\langle \psi_+^{(f)} | \hat{H}_1 | \psi_+^{(i)} \rangle$ の中で, ゼロでない, a を与える項は $(N+1)N! \prod_l n_l!$ 個である. これは, 規格化定数分母の 2 乗と同じで, 結局 $\langle \psi_+^{(f)} | \hat{H}_1 | \psi_+^{(i)} \rangle = a$ となる.

一方, φ_i ($i \leq N$) がすべて φ_{fin} であるとする, と,

$$\psi_+^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{(N+1)}} \prod_{m=1}^N \hat{R}_{m,N+1} \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N) \varphi_{\text{ini}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (8B.18)$$

と書ける. $\det^{(+)}$ の $N!$ 個の項がすべて $\varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N)$ となり, 規格化定数分母の $N!$ と割り切れている. これに対して終状態は

$$\psi_+^{(f)} = \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_1) \cdots \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_N) \varphi_{\text{fin}}(\mathbf{r}_{N+1}) \quad (8B.19)$$

であるから, $\langle \varphi_{\text{fin}} | \hat{H}_1 | \varphi_{\text{ini}} \rangle = a\sqrt{N+1}$ となり, フェルミの黄金則より, 遷移確率は $N+1$ 倍であることが示された.

参考文献

- [1] S. Datta, “ElectronTransport in Mesoscopic Systems” (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [2] 勝本信吾 「メゾスコピック系」 (朝倉書店, 2002)
- [3] Y. Gefen, Y. Imry, and M. Ya. Azbel, Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).
- [4] A. Yacoby, R. Schuster, and M. Heiblum, Phys. Rev. B **53**, 9583 (1996).
- [5] A. Aharony, O. Entin-Wohlman, T. Otsuka, H. Aikawa, S. Katsumoto and K. Kobayashi, Phys. Rev. B **73**, 195329 (2006).
- [6] M. Hashisaka, Y. Yamauchi, S. Nakamura, S. Kasai, K. Kobayashi, and T. Ono, J. Phys.: Conf. Ser. **109**, 012013 (2008).
- [7] K. Ogawa, T. Katsuyama and H. Nakamura, Phys. Rev. Lett. **64**, 796 (1990).
- [8] 山本喜久, 宇都宮聖子, 日本物理学会誌 **67**, 96 (2012).
- [9] T. Byrnes, N.-Y. Kim, and Y. Yamamoto, Nat. Phys. **10**, 803 (2014).
- [10] H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, Rev. Mod. Phys. **82**, 1489 (2010).
- [11] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [12] P. Minnhagen, Rev. Mos. Phys. **59**, 1001 (1987).