

半導体物理学 第 13 回

勝本信吾

東京大学物性研究所

2011 年 7 月 9 日

Ch. 9 量子ホール効果

独 Max-Planck 研究所の Klaus von Klitzing によってその発見がアナウンスされた量子ホール効果 (Quantum Hall Effect, QHE) も、半導体物理のトピックスらしく、抵抗標準に使えますよ、という話で論文が掲載された [1]。現在ではその基礎物理学における重要性は論を待たないが、投稿時は Phys. Rev. Lett. には適さない、と最初は referee から reject された、ということである。また、QHE は日本でも学習院大学川路紳二のグループにより同時期に独立観測されており [2]、更にはそれに先立ち、当時東大理学部の助手であった安藤恒也によって理論的に予言されていた (ただし、論文誌に掲載したわけではなく、川路への私信の中に記されている)。

QHE は、von Klitzing や安藤が予期したように、抵抗標準として単位系を塗り替えることになったが、それ以上にその後様々な方向で基礎物理学に深く大きなインパクトを与えた。その 1 つは、分数量子ホール効果 (Fractional Quantum Hall Effect, FQHE) をきっかけとして多彩な多体効果が直接的に扱えるようになったこと、また、他方では、トポロジカル不変量という概念が生まれ [3]、現象のトポロジ的な性質に着目する、という新しいパラダイムが拓けたことなどが挙げられる。

ここでは、それらのほんの「触り」の部分を紹介する。

1 2DEG の磁気伝導

最初に整数量子ホール効果 (Integer Quantum Hall Effect, IQHE) に関係した実験をざっと見ておこう。

1.1 Shubnikov-de Haas 振動

まずは、2DEG の弱磁場伝導で日常的に見られる、シュブニコフ・ド・ハース振動 (Shubnikov-de Haas oscillation, SdH 振動) を見てみよう。低温で 2DEG の電気抵抗を測定しながら、2次元面に垂直に磁場を印加する。磁場に対して抵抗をプロットすると、図 9.1 のように磁場に対して抵抗が振動し、その振幅は磁場と共に大きくなっていく。また、振動の磁場に対する周期も次

第に広がっていく．これが SdH 振動であり，図 9.2 に示したように，磁場の逆数 ($1/B$) に対してプロットすると振動はほぼ等間隔となる．

この $1/B$ プロットで等間隔振動となる性質から，この SdH 振動は後述するランダウ量子化によって生じているものであることが示唆される．

1.2 整数量子ホール効果

SdH 振動振幅が小さい間は，一定の電流に対して垂直方向に生じるホール電場の大きさ，すなわちホール抵抗 $R_{xy} = R_H$ は磁場にほぼ比例する，通常の振舞いである．SdH 振動振幅が大きくなるにつれてホール抵抗にも SdH 振動と同期したうねりが乗るようになるが，やがて階段構

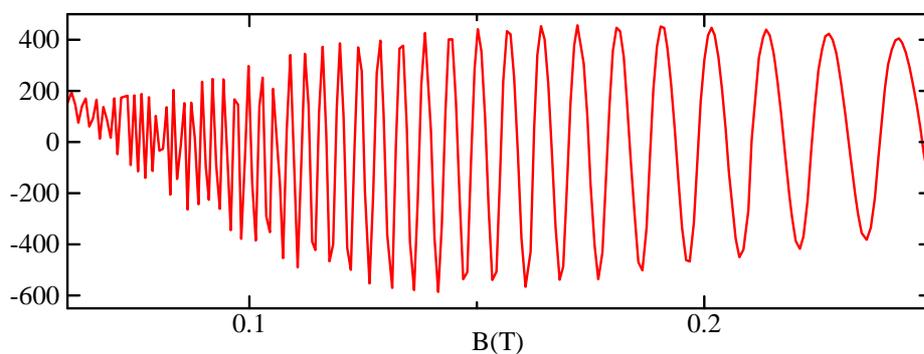
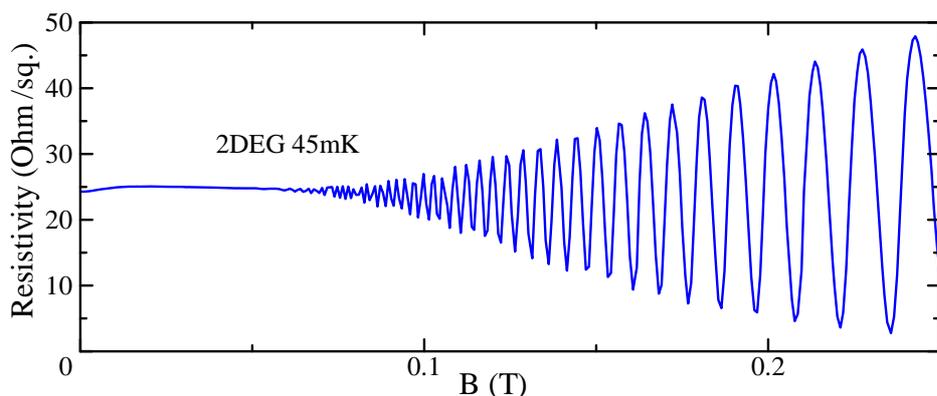


図 9.1 2DEG で測定された SdH 振動．下の図は，磁場と共に振動間隔が広がっていることを示すため，縦軸を $(\rho - \rho_{av})/B^2$ というちょっと変わった量にしてみたもの．

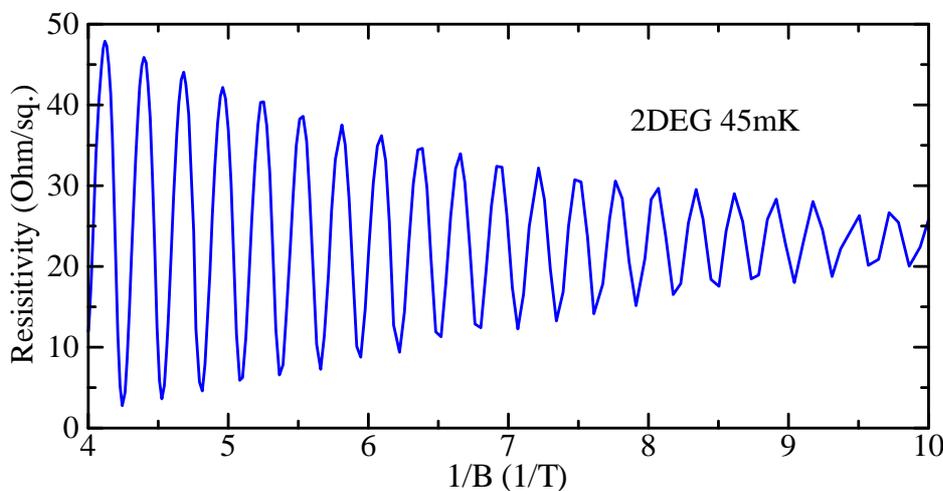


図 9.2 図 9.1 の SdH 振動を，磁場の逆数 $1/B$ に対してプロットしたもの．振動がほぼ等周期で生じている．

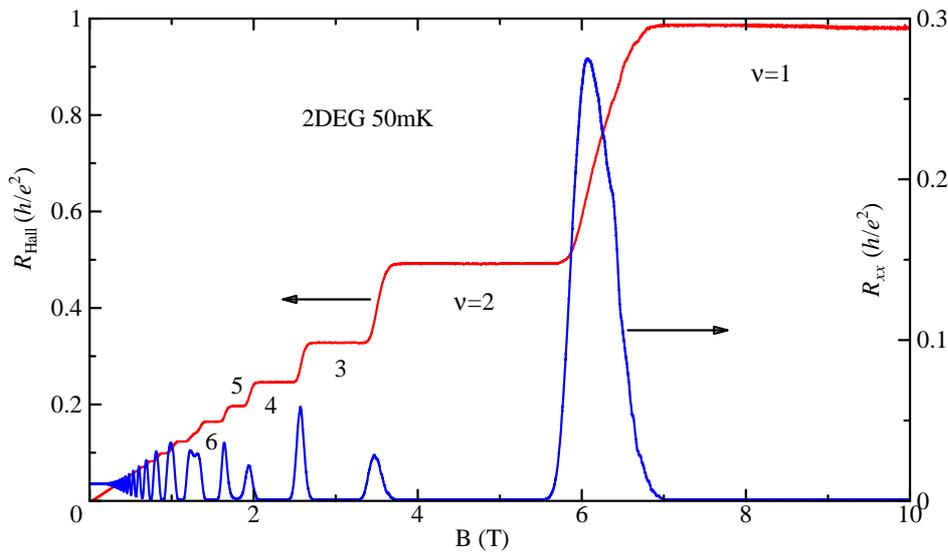


図 9.3 ヘテロ接合 2 次元電子系に現れた、典型的整数量子ホール効果. $\nu = 1$ の階段は、電極の問題で本来の位置から大きくずれている.

造を取るようになる．この階段の高さは

$$R_{Hp}(n) = \frac{R_q}{2n} \quad (n \text{ は適当な大きさの整数}) \quad (9.1)$$

となる． n が小さくなってくると、やがて (9.1) の階段が 2 つに分離して R_q/n を階段高さにするようになる．この時、階段の平らなところで縦方向抵抗 R_{xx} を見ると、抵抗が消失し、ゼロ抵抗状態となっていることがわかる．以上が、IQHE のあらましである．図 9.3 に以上の特徴が現れていることがわかる．

IQHE が研究者を驚かせたのは、この R_H の階段の高さが当時知られていた h/e^2 の整数分の 1 の正確な値に対して 6 桁、7 桁、それ以上の精度で一致したことである．これまでも観てきたように、我々が半導体中で眺めている現象は、2-3 桁のエネルギースケールの違いによって築かれた「舞台」の上での役者（電子）の振舞いであった．従って、これを「舞台」として眺めていられるのはせいぜい 2-3 桁の精度であり、それ以上の精度を求めるには「舞台裏」に入り込んでいなければならない・・・というのが物質科学の世界の常識であった．従って、物質が示す測定値が全く物質によらない普遍定数で表される値に量子化し、それが物質科学としては果てしない位精確である、というのは超伝導以来の驚き、と言っても過言ではなかった．図 9.4 に示したのは、各国の研究機関で IQHE の発見直後に様々に測定された量子ホールプラトーの値から計算された h/e^2 の値で、7 桁程度の精度があることがわかる．現在では、電気抵抗の国際標準として量子ホール効果を使用し、 h/e^2 を 1 Klizting と呼ぶことが決まっている．

2 磁場中の 2 次元電子

確認:本ノートにおいては(これまでもそう(のつもり)であったが)、電子の電荷を $-e$ と記す．(以降、符号の違いで物理的な意味合いが異なる場合が生じるので特に注意．) また、簡単のため、当分は電子スピンに起因する Zeeman 分裂は考慮しないことにする(実験を見る場合はそうもいかないのだが)．

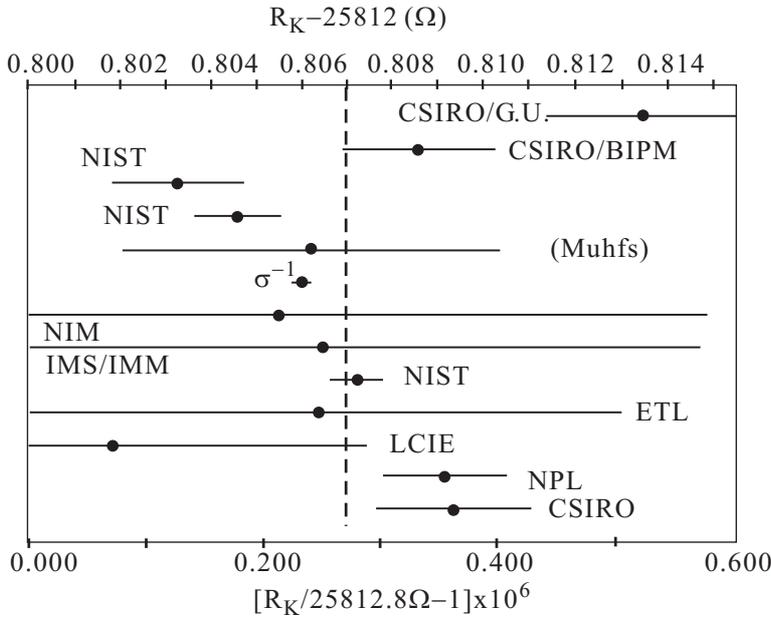


図 9.4 IQHE の発見後，様々な研究機関で測定された量子ホールプラトーから得られた h/e^2 の値を誤差棒付きでプロットしたものの σ^{-1} は当時の微細構造定数から計算した値．点線が国際度量衡標準で $1 R_K$ (Klitzing) として決められた値．

2.1 古典論

2次元面に束縛された電子に，面に垂直な磁場 B が印加された系を考える．電子の古典的運動方程式は，Lorentz 力 $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を考慮して，

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.2)$$

である．この運動方程式を与える Lagrangian を考えると，ベクトルポテンシャルを \mathbf{A} として，

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}v^2 - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (9.3)$$

であるから，正準運動量 (canonical momentum) \mathbf{p}_c は

$$\mathbf{p}_c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\mathbf{v} - e\mathbf{A} \quad (9.4)$$

と与えられる．この古典的電子はよく知られているようにサイクロトロン運動しながら，その中心がシフトする．サイクロトロン運動の中心座標 (ガイド中心, guiding center) を $\mathbf{R} = (X, Y)$ ，とすると，

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + r_0(\cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t)) \quad (9.5)$$

が解である．ここで，

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{m}, \quad r_0 \equiv \frac{v_0}{\omega_c} \quad (9.6)$$

はそれぞれ，サイクロトロン振動数，サイクロトロン半径である．

ガイド中心 \mathbf{R} はポテンシャルが全くない系においては固定である．電場 \mathbf{E} が面内にかかって，式 (9.2) の右辺が Lorentz 力 $-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ になると，ガイド中心は電場と垂直方向に速さ $|\mathbf{E}|/|\mathbf{B}|$ で等速度運動する．

2.2 量子論

量子論に移行しよう．古典的な粒子の運動がどのように量子論に移行したかを考えると，空間的に局在した古典的粒子がある範囲の空間を運動する場合，これに対応する量子論の波動関数はその範囲に広がったものになる (Ehrenfest の定理のやや不正確な表現)．例として自由な粒子の波動関数は全空間に広がり，量子井戸内で反射を繰り返す粒子の波動関数は井戸内に広がる．磁場中の古典的 2 次元電子は静止した中心の周りにサイクロトロン運動をしていたので，量子論では 2 次元面に広がっていた波動関数が磁場によって空間的にサイクロトロン軌道程度の大きさに局在することが予想される．

古典系の取り扱いからわかるように，この系のハミルトニアンは，

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{(\mathbf{p}_c + e\mathbf{A})^2}{2m} \equiv \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} = \frac{\pi_x^2 + \pi_y^2}{2m}, \quad (9.7)$$

である．

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p}_c + e\mathbf{A} \quad (9.8)$$

を動的運動量 (dynamical momentum) という． $\boldsymbol{\pi}$ の成分と座標の交換関係は

$$[\pi_\alpha, \beta] = -i\hbar\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = x, y \quad (9.9)$$

で，通常の運動量と同じであるが， π_x, π_y の交換関係は

$$[\pi_x, \pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l^2} \quad (9.10)$$

と交換しない．ここで， l は磁気長 (magnetic length) と呼ばれ，

$$l \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (9.11)$$

と定義される．

古典論に習いガイド中心 (X, Y) (演算子 \hat{R} を導入しよう．実空間座標演算子 \hat{r} として

$$\hat{r} = \hat{R} + \frac{l^2}{\hbar}(\pi_y, -\pi_x) \quad (9.12)$$

として \hat{R} を定義する．上の式で，第 2 項は古典解 (9.5) に習ったものであることは，(9.5) を両辺時間微分して \mathbf{v} にしてみれば容易にわかる． π_x, π_y の交換関係より，

$$[X, Y] = il^2 \quad (9.13)$$

である．この時，Hamiltonian は (X, Y) に依らないので， (X, Y) は時間変動しない「恒量」である．ただし，もちろん，交換関係 (9.13) より， X, Y 間には不確定性が生じる．以上より，この系の正準共役な物理量の組として， $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_c)$ 以外に， $\hat{R}, \boldsymbol{\pi}$ が取れる (ただし，交換関係は，

(9.10), (9.13) のように, 各量の x, y 成分同士に対して有限となる) ことがわかる. ハミルトニアンが式 (9.7) のように π で書けているので, こちらを選択することが便利な場合も多い.

ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ が加わりハミルトニアンが $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + U(\mathbf{r})$ になったとすると, \hat{R} に関する Heisenberg の運動方程式は

$$\dot{X} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}', X] = \frac{i}{\hbar} \left[U(\mathbf{r}), x + \frac{l^2}{\hbar} \pi_y \right] = \frac{l^2}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (9.14a)$$

$$\dot{Y} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}', Y] = \frac{i}{\hbar} \left[U(\mathbf{r}), y - \frac{l^2}{\hbar} \pi_x \right] = -\frac{l^2}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (9.14b)$$

となる. 今, 面内 x 方向に一樣な電場がかかった状態を考えると $U(\mathbf{r}) = (-eEx, 0)$ であるから, 上記運動方程式は $\dot{Y} = (l^2/\hbar)eE = E/B$ となり, ガイド中心は y 方向, すなわち電場と垂直方向に一定速度 E/B でシフトする, 古典論と同じ結果が得られる.

2.3 ランダウ量子化

さて, ハミルトニアン (9.7) のように π について 2 次式で調和振動子的である*1ことから, 演算子

$$a = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_x - i\pi_y), \quad a^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_x + i\pi_y) \quad (9.15)$$

を導入すると, 交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (9.16)$$

が満たされ, ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (9.17)$$

と調和振動子形に書くことができ, 式 (9.15) で昇降演算子が定義できたことがわかる. これから, 離散的能量準位

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.18)$$

が得られる. これは, 磁場による量子閉じ込めにより運動量が離散化し, エネルギー準位が離散化したものと考えられる. このような磁場による量子化をランダウ (Landau) 量子化と呼ぶ.

ランダウ量子化を「円運動の量子化」として半古典的に解釈すると, 次のようになる. サイクロトロン運動を一周する際に電子が獲得する位相は, 距離 $2\pi r_0$ を進む時に通常の波としての振動により得られる位相と, ベクトルポテンシャルがある空間を移動する際に獲得する AB 位相の両方を考えると

$$2\pi \left(r_0 k - B \cdot \pi r_0^2 \frac{e}{\hbar} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{\omega_c} \frac{\hbar k}{m} - \frac{1}{2} \frac{mv_0^2}{\hbar\omega_c} \right) = \frac{2\pi}{\hbar\omega_c} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (9.19)$$

*1 正準共役な演算子である π_x, π_y それぞれの 2 次の和であり, $p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ という調和振動子ハミルトニアンと同じと見ることができる.

となる．これが n を非負整数として $2(n+1)\pi$ に等しくなければならないとすると，

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_k = \hbar\omega_c(n+1) \quad (9.20)$$

で，式 (9.18) とはゼロ点エネルギーが $\hbar\omega_c/2$ だけ異なっている．これは，最低エネルギー準位の閉じ込めを強く見積もり過ぎているためである．「円運動の量子化」という粗い見方でもある程度正しい結果が得られる一方，最低ランダウ準位に関しては不正確さが大きい．これは半古典論であるから当然で，量子論の場合，最低準位ではポテンシャル障壁中へしみ出す波動関数の割合が大きく，その分運動エネルギーは大きく下がっている．

2.4 ガイド中心

上に述べたように， R はハミルトニアン (9.7) と交換するので (9.18) は R にはよらず， R の自由度分縮退している． R の要素 X, Y は交換しないので，(9.18) に属する固有関数を決める際に $\Delta X, \Delta Y$ をどう取るかという任意性が生じる．更に，複素波動関数自身にはゲージの取り方によって異なる位相因子がつく．

ランダウ量子化自身は，前副節で見たように半古典的に説明のつく，比較的わかりやすいものであるが，一様な磁場のみがかかった状態は空間の並進対称性を破っているわけではないので，各々の固有関数自身ではなく，固有関数による基底セットを考える場合は何らかの形で系の並進対称性が担保される必要がある．今の場合，上記の (X, Y) の自由度に並進対称性が残っている．今，仮にサイクロトロン円運動を量子化した局在波動関数を作ったとすると，一般の固有関数は (X, Y) の自由度で足し上げた線形和で表される，というのが最も単純な考えである．

ところが， (X, Y) は (静磁場のみの場合) エネルギーを変化させないだけで， q 数であり，互いに交換しないので厄介な (大変面白い?) 状況である． (X, Y) の自由度から何らかの物理量に対角化することで得られる量子数を ξ とすると， ξ の異なる状態は縮退している．何を対角化するかで波動関数の様相は大きく変化する．

特定のゲージに対して座標表示で波動関数を書き下すには，結局 a^\dagger 等を座標表示で書き下す必要があり，Schrödinger 方程式まで戻ったほうがむしろ簡単である．以下，代表的ゲージ，ランダウゲージ，対称ゲージを取って波動関数の座標表示を求めてみる．注意点として，一見すると波動関数の確率振幅の関数形までゲージの選択に依存するよう見えるが，ガイド中心 X, Y が共役であるというやや特殊な状況で，容易に解ける形の解を探した結果このようになったに過ぎない．仮にある電子の状態をある波動関数で表したとすると，確率振幅はゲージ不変な量であり，各ゲージの下での表現は，適当な位相を与えることで相互に変換することができる．

2.4.1 ランダウゲージ

ランダウゲージ $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ を取ると, Schrödinger 方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right)^2 \right] \psi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 - 2i\hbar eBx \frac{\partial}{\partial y} + e^2 B^2 x^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (9.21)$$

と書き下ろされる．ハミルトニアン中に y が含まれていない（もちろん， $\partial/\partial y$ とは別の変数と見る）ことから， y 部分は平面波となり，変数分離して $\psi(\mathbf{r}) = u(x) \exp(iky)$ と書けると考えられる．これを上式に代入すると， $\exp(iky)$ 部分は消えて

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(x + \frac{\hbar}{eB} k \right)^2 \right] u(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} (x + l^2 k)^2 \right] u(x) = Eu(x) \quad (9.22)$$

となる．これは， $x = -l^2 k$ を中心とする 1 次元調和振動子の方程式であり，固有関数は

$$\psi_{Nk}(\mathbf{r}) \propto H_N \left(\frac{x - x_k}{l} \right) \exp \left(-\frac{(x - x_k)^2}{2l^2} \right) \exp(iky) \quad (x_k \equiv -l^2 k) \quad (9.23)$$

と書くことができる． H_N は N 次の Hermite 多項式である．今の場合， $X = x_k = -l^2 k = -l^2 p_y / \hbar$ で， X が定まった解となっている．一方， y に関しては平面波であるから全空間に広がっていることになる．これは，むしろ， X と Y の共役性を反映したもので， X を定めたために Y が不確定となったことによる．式 (9.23) は y 方向に広がった波動関数（平面波）を表すが， y 方向の進行波ではない． X の変化を無視して y 方向の群速度を考えると， $\partial E / \partial k = 0$ より，ゼロである．ただし，後で見るように， $\partial X / \partial k$ がゼロでないため， X にエネルギーが依存する状況が生じると， y 方向への運動が生じる．

2.4.2 対称ゲージ

講義では時間の関係で触れません．

対角化の対象を替えることで様相が大きく変化する様子を見ておこう．対称ゲージ $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ を取る．これは，円筒座標 (r, φ, z) を使うと， $\mathbf{A} = (A_\varphi, A_r, A_z) = (Br/2, 0, 0)$ と書ける．ラプラシアンを円筒座標に書き換えるのがやや面倒であるが，2次元系で2次元極座標と同じであり，結局 Schrödinger 方程式を次のように書くことができる．

$$\frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - i\hbar eB \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2 r^2}{4} \right] \psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi). \quad (9.24)$$

この形式の場合，今度はハミルトニアンに φ の項が現れていないので再び変数分離解を仮定し，今度は $\psi(r, \varphi) = v(r) \exp(im_j \varphi)$ とすると， φ を消すことができ，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 m_j^2}{2mr^2} + \frac{1}{8} m\omega_c^2 r^2 + \frac{m_j \hbar \omega_c}{2} \right] v(r) = Ev(r). \quad (9.25)$$

これは付録 E の 2 次元調和振動子と同型の方程式であり，結局固有値，固有関数を次のように得ることができる．

$$E_{Nm_j} = \hbar\omega_c \left(N + \frac{m_j + |m_j|}{2} + \frac{1}{2} \right), \quad (9.26)$$

$$\begin{cases} \psi(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(im_j \varphi) v_{Nm_j}(r), \\ v_{Nm_j}(r) = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{N!}{(N - m_j)!}} \exp\left(-\frac{r^2}{4l^2}\right) \left(\frac{r}{\sqrt{2}l}\right)^{|m_j|} L_N^{|m_j|}\left(\frac{r^2}{2l^2}\right) \end{cases} \quad (9.27)$$

この形の波動関数は，上に見る通り角運動量を対角化 (m_j) しているが，同時に R においては $X^2 + Y^2$ を対角化しており (下の式を見よ)，確率振幅は原点の周りの同心円状になる．

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\pi_y}{m\omega_c}, & Y &= y - \frac{\pi_x}{m\omega_c}, & \text{より} \\ X^2 + Y^2 &= \frac{1}{m\omega_c} \left[\frac{\pi_x^2 + \pi_y^2}{m\omega_c} + 2(y p_x - x p_y) \right] = 2l^2 \left[\frac{l^2}{2\hbar^2} \pi^2 + \frac{y p_x - x p_y}{\hbar} \right] \\ &= 2l^2(n - m_j + 1/2). \end{aligned} \quad (9.28)$$

すなわち，この形の波動関数では $X^2 + Y^2$ が対角化されており， $X^2 + Y^2 > 0$ より m_j は n 以下の整数である．

参考文献

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [2] S. Kawaji and J. Wakabayashi, in *Physics in High Magnetic Fields*, eds. S. Chikazumi and N. Miura (Springer, Berlin 1981).
- [3] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- [4] 安藤恒也 「量子効果と磁場」 (丸善, 1995)
- [5] 吉岡大二郎 「量子ホール効果」 (岩波書店, 1998)

付録 F：2次元調和振動子の回転対称解

2次元調和振動子の解としては，直交座標を使って2つの1次元調和振動子に分解して求めるものが簡単であるが，この場合，回転対称ポテンシャルであるにもかかわらず，解には最低準位以外には回転対称性がない．

ポテンシャルの対称性を反映した解を得るには，2次元極座標 (r, φ) を使うのが便利である．ラプラシアンを (r, φ) で表し，ポテンシャルを加えると，

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{m\omega}{2} r^2 \right] \psi = E\psi. \quad (F.1)$$

動径方向自由度 r と回転自由度 φ について変数分離仮定する .

$$\psi(r, \varphi) = \zeta(r)\phi(\varphi). \quad (\text{F.2})$$

φ について $\psi_\chi = \exp(il\varphi)$ の形を仮定し , (F.2) を (F.1) へ代入すると , ζ の微分方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} \right) + \frac{m\omega}{2} r^2 \right] \zeta(r) = E\zeta(r) \quad (\text{F.3})$$

が得られる . 以下 , $l \geq 0$ とするが , 対称性から l は絶対値が問題となる . すなわち , 最終結果の l を $|l|$ で置き換えて良い . この ζ の 2 階の常微分方程式を既知の^{*2}微分方程式に帰着させよう .

r を無次元化するため $\rho \equiv \sqrt{m\omega/\hbar} r$ とし^{*3} , 関数 $f(\rho)$ を次式で定義する .

$$\zeta = \rho^l e^{-\rho^2/2} f(\rho). \quad (\text{F.4})$$

$e^{-\rho^2/2}$ の項は (??) の $\rho \rightarrow \infty$ での漸近形より , ρ^l は $\rho \rightarrow 0$ での (F.3) を解いた漸近形よりこのように乗じた . すると , f についての微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left(\frac{2l+1}{\rho} - 2\rho \right) \frac{df}{d\rho} + 2(\lambda - l - 1)f = 0 \quad (\text{F.5})$$

が得られる . ここで , $E = \hbar\omega\lambda$ と置いた . 更に $s = \rho^2$ と置くと

$$s \frac{d^2 f}{ds^2} + (l+1-s) \frac{df}{ds} + \frac{1}{2}(\lambda - 1 - l)f = 0 \quad (\text{F.6})$$

と変形することができる . これは , 合流型超幾何関数の形をしており , $s \rightarrow \infty$ で解が発散しないためには

$$\lambda - 1 - l = 2n_r \quad (n_r = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{F.7})$$

が必要十分条件である . n_r が動径方向運動の量子数であり , 解はラゲール (Laguerre) の陪多項式 $L_{n_r+l}^l(s)$ となる . エネルギー固有値として ,

$$E = \hbar\omega\lambda = \hbar\omega(l + 2n_r + 1) \quad (\text{F.8})$$

となり , $l + 2n_r = n_t$ とすれば見慣れた 2 次元調和振動子のエネルギー準位が得られ , 調和振動子系では独立な自由度の 1 量子数当たり $\hbar\omega$ のエネルギーを持っているということを意味している^{*4} . 波動関数は , 規格化定数を除いて次のようになる .

$$\psi_{n_r, l}(r, \varphi) \propto e^{il\varphi} r^l e^{-(m\omega/2\hbar)r^2} L_{n_r+l}^l \left(\frac{m\omega}{\hbar} r^2 \right). \quad (\text{F.9})$$

^{*2} 数学の本に良く出てくる有名な , という意味で , 本質的でないと思われるかもしれないが , 解の性質を調べる上で現実的に大変重要である .

^{*3} これは , ポテンシャルのエネルギースケール $\hbar\omega/2$ に等しい運動エネルギーを与える波の波長 (水素原子ではボーア半径) で長さを測っていることになる .

^{*4} 電磁場は調和振動子の集合として記述できる (ジーンズの定理) からアインシュタインの関係式が導かれる .