

# 講義ノート「低温物理学」 No.1

2009.4.6

物性研究所 勝本信吾

## Part I

2009年度夏学期「低温物理学」において勝本は前半を担当する．これが Part I である．Part II は福山寛教授が担当する．したがって，この講義ノートは Part I のみである．

## 1 Introduction

### 1.1 なぜ低温か？－ Why low temperature?

物理学は，自然をできるだけ簡単な考えから出発して説明しようとする学問であるが，自然界の捉え方として物理学で良く使用されるのが自然界を階層的に捉えよう，というものである．ここで「階層」を決めるものは，様々な尺度であり，例えば空間的な大きさを捉えるのはポピュラーな見方の一つである．

講義では階層構造から低温の必要性について簡単にお話する．

### 1.2 「低温物理学」

現在，一般に「低温物理学」と呼ばれているものの範囲を知るために格好なのは，この分野の大きな国際会議である低温物理学国際会議 (International Conference on Low Temperature Physics, LT) でどのような分野がカバーされているか見てみることである．この国際会議は3年に1度開かれ，すでに25回を数えているから，単純計算では75年の歴史を持っていることになる．幸い昨年(2008年)開催された第25回の会議(LT25)の会議録(Proceedings, 論文集)は，IOPよりweb上にて出版され，無料で閲覧することができる．URLは

<http://www.iop.org/EJ/news/-topic=1400>

である．このLT25はカマリン-オネスが初めてヘリウム4を液化してから100年の節目ということで，ライデン研究所のあるオランダで開催された．

そこで，これを実際に見てみると，大きな見出しとして

**Part 1** Cryogenic Technologies and Applications

**Part 2** Electronic Quantum Transport

**Part 3** Quantum Gases Liquids and Solids

**Part 4** Quantum Phase Transitions and Magnetism

**Part 5** Superconductivity

が並んでいる。

Part 1 の低温技術と応用は、LT ならではの項目であり、技術開発とその応用が物理と近い所に引き続き位置して来たことを物語っている。Application の中身は、プロジェクタを使用したの講義でも見るように情報処理、医学生理学、宇宙物理学、エネルギーなど極めて多岐にわたっている。特に宇宙物理実験における低温技術の重要性は非常に高まっている。

Part 2 の量子輸送現象は、低温物理学としては他と比較すれば比較的新しい分野であり(と言っても、すでに 30 年位の歴史を持つ)、電子局在、量子ホール効果、メゾスコピック系、分子・原子の伝導など、年を追うごとにより微小な系の量子輸送をその対象範囲とするようになってきた。

Part 3 の量子気体、液体、固体は低温物理学が始まって以来、低温物理学の華として中心課題となってきた。何と言っても中心はヘリウムであるが、レーザー冷却によって原子気体のボース・アインシュタイン凝縮が実現して以来、原子種は飛躍的に増加している。

Part 4 は極めて巨大な分野である。特に磁性はそれだけでも低温物理学と対等以上に大きな分野である。Part 5 は Part 3 同様、カマリン・オネスが残した低温物理のもう一つの華であり、高温超伝導体発見時の京都で開かれた LT18 では、ここを中心に社会を巻き込んだ大騒動となった。

### 1.3 Part I で見て歩く範囲

こうしてみると、「低温物理学」と言っても極めて広く、とても半年の講義の半分で一通りにもカバーすることは不可能である。この講義では、いくつかのトピックスを選んでその物理学のおもしろさを話していきたいと思う。「カバー」というのも恐れ多いので「見て歩く」ということにしよう。

1. ボース凝縮
2. 超伝導・ジョセフソン効果
3. 単電子現象
4. 量子ドット
5. コヒーレント伝導・量子ホール効果

あたりを見て歩くことにしよう。

ここで、低温物理学 100 年の歩みをごくごく粗っぽく眺めておこう。(PowerPoint による紹介)

## 2 ボース・アインシュタイン凝縮

Bose-Einstein Condensation (BEC)<sup>1</sup>: 自由度間の相互作用によらない相転移(量子統計力学的相転移)と呼ばれている。

---

<sup>1</sup>BEC という略記は、Bose-Einstein Condensation と Bose-Einstein Condensate (ボース・アインシュタイン凝縮体) の両方に使われる。紛らわしいようだが、使ってみるとそれ程混乱することはない。

相互作用による相転移は直感的にわかり易い面があるが、相転移は必ずしも相互作用を要するものではなく、様々な要因のせめぎ合いによって「相」の変化が起こることがある。その代表が BEC である。

ボース系の場合、粒子間の力に相当する相互作用は存在しないにもかかわらず、その統計的な性質から同じ状態にできるだけ多数の同種粒子が入ろう、とする傾向が生じる。2 粒子の場合について考えてみよう。2 粒子系の場合波動方程式の解を  $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  とすると、系の波動関数  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  は

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)] \quad (1)$$

と対称化される。したがって、 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  が得られる確率は

$$|\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 = \frac{1}{2} [|\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 + |\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)|^2 + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^* \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)^*] \quad (2)$$

となって、 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  という条件に対して、後半の 2 つの干渉項が強調する効果を持つことがわかる。低温で  $\lambda \sim l$  となったとき、結局この傾向を満足するためには  $k = 0$  の状態に粒子が入り込む必要があることから BEC が発生する。

$$E_k = \frac{p^2}{2M} = k_B T : \text{Bose 統計}$$

$$\Delta p \sim \sqrt{M k_B T}$$

$$\therefore \lambda = \frac{h}{\Delta p} \sim \frac{h}{\sqrt{M k_B T}} \quad (3)$$

すなわち、温度が下がると系を代表するドブロイ (de Brogli) 波長は  $\sqrt{T}$  に反比例して長くなる。波動関数の空間的なオーバーラップが大きくなると、同種粒子はお互いに区別がつかなくなり、全系の波動関数は粒子の交換に対して対称 (Boson) になる。結果、ある温度を境として、位相空間  $(r, p)$  内での凝縮が起こる。これが BEC である。

## 2.1 理想気体のボース・アインシュタイン凝縮

### 2.1.1 Bose 分布からの導出

spin 0 の理想 Bose 気体を考える。Bose 分布

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} \quad (\beta \equiv (k_B T)^{-1}) \quad (4)$$

で、 $\mu = 0$  を次のように定義しよう。 $T = 0$  では (4) より基底状態にすべての粒子が落ち込む。そこで、

$$\mu(T = 0) = 0 \quad (5)$$

とする。有限温度では、系の粒子数を  $N$  とすると、

$$N = \sum_i f(\epsilon_i)$$

であるから，

$$N \rightarrow \int f(\epsilon) \mathcal{D}(\epsilon) d\epsilon \quad (?)$$

としたいところである．この時，基底状態の粒子数  $N_0$  は

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\mu\beta} - 1} \sim \frac{1}{-\mu\beta} = -\frac{k_B T}{\mu} \rightarrow \mu \sim -\frac{k_B T}{N_0} \quad (6)$$

となるはずである．この線に沿って計算すると，3次元理想気体では，

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{より} \quad \mathcal{D}(\epsilon) = \frac{m^{3/2} V}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \sqrt{\epsilon} \quad (7)$$

であるから，

$$\begin{aligned} N &= \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon \\ &\quad \text{ここで } x \equiv \epsilon\beta, \quad \alpha \equiv \mu\beta \text{ とおくと} \\ &= \frac{(m k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} V \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x-\alpha} - 1} dx \end{aligned} \quad (8)$$

ここで，定積分の部分を  $I(\alpha)$  と書くことにすると， $I$  は

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sim 2.6 \quad (9)$$

で， $\alpha < 0$  に対して， $\alpha$  の絶対値が大きくなると減少する関数である．したがって， $T \rightarrow 0$  で (8) の  $N$  のとり得る最大値はどんどん小さくなってしまい，数え落としているものがあるのは明らかである．もちろん，これが基底状態に落ち込むマクロな粒子数である．

(8) から

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}}{(m k_B T)^{3/2}} \frac{N}{V}$$

であるから，これが，(9) を超える低温で異常（基底状態の粒子数増加）が起こる．この臨界温度  $T_c$  は

$$T < T_c \equiv \frac{2\pi \hbar^2}{m k_B} \left[ \frac{N}{\zeta(3/2) V} \right]^{2/3} \quad (10)$$

と見積もられる．

ここで， $l \equiv (V/N)^{1/3}$  は粒子間の平均距離であるから，(10) は数係数を無視すると，

$$l = \frac{h}{\zeta(3/2) \sqrt{2\pi m k_B T_c}} \sim \lambda(T = T_c) \quad (11)$$

である．すなわち，Bose-Einstein 凝縮は，平均の de Broglie 波長が粒子の平均間隔程度になった時に起こることがわかる．

$T_c$  以下では，基底状態の粒子数  $N_0$  を入れて

$$N = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{(\epsilon-\mu)\beta} - 1} d\epsilon + N_0 \quad (12)$$

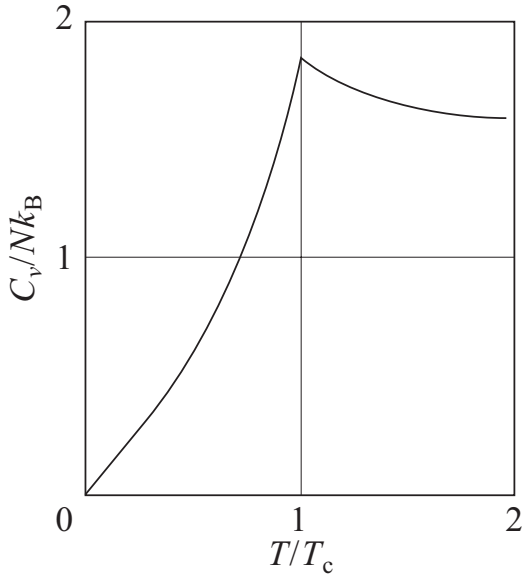


図 1: 理想ボース気体の定積比熱の温度依存性．  
 $T_c$  はボース・アインシュタイン凝縮の転移温度．

とする．(6) より,  $T < T_c$  では  $N_0$  がマクロな数となるため  $\mu = 0$  である．したがって,

$$\begin{aligned}
 N_0 &= N - \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\epsilon\beta} - 1} d\epsilon \\
 &= N \left[ 1 - \frac{V(mk_B T)^{3/2}}{N\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} I(0) \right] \\
 &= N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

ちょうど, 強磁性転移で転移点以下で自発磁化が急速に有限の値を獲得するのと同じである．  
 $T < T_c$  で系の全エネルギーを計算する．

$$E = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \tag{14}$$

$$\text{ここで } T < T_c \text{ では } \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \text{ より}$$

$$E = \frac{3}{2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} V (k_B T)^{5/2} \tag{15}$$

これより, 定積熱容量は

$$C_v = \frac{15}{4} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} V k_B^{5/2} T^{3/2} \tag{16}$$

となる．

$C_v$  は  $T_c$  でカスプを示し, これが相転移であることを示している．

### 2.1.2 ボース誘導 (Bosonic Stimulation)

BEC が形成される際は, この統計的性質が, 更にあたかも引力のように BEC 外の粒子を「呼び込む」ような遷移を引き起こす．これをボース誘導 (Bosonic stimulation) と呼ぶことがあるが, ボース凝縮と原理的に同等なものであり, 厳密に区別しないで使用する事も多い．

## 直交する $N$ 個の 1 粒子波動関数の単純積

$$\phi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \varphi_1(\mathbf{r}_1)\varphi_2(\mathbf{r}_2)\cdots\varphi_N(\mathbf{r}_N)$$

を対称化して同種  $N$  粒子ボース系の波動関数を作ろう． $N$  粒子のあらゆる入れ替え操作は，全部で  ${}_N C_N = N!$  個存在する．すべての 2 粒子交換に対して対称にするためには，このような入れ替え操作を行った波動関数をすべて足し上げる必要がある．対称な場合は符号が変化しないのでそのまま足し上げれば良い．

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_l n_l!}} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_N)} \hat{R}^{(N)}(i_1, i_2, \dots, i_N) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (17)$$

と書くことができる．ここで， $(1, 2, \dots, N)$  を  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  へ入れ替える操作を行う演算子  $\hat{R}^{(N)}(i_1, i_2, \dots, i_N)$  を導入した．また， $\psi_+$  の規格化定数分母に  $\sqrt{\prod_l n_l!}$  が入っているのは， $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  の中に，同じものが入っていた場合に必要な補正で， $n_l$  が  $l$  に属する同じ状態の個数，を表す．

フェルミ系の反対称な波動関数はスレーター行列式を用いて表すことができたが，ボース系も同様な記号を使って形式的に

$$\psi_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \prod_l n_l!}} \det^{(+)}\{\varphi_i(\mathbf{r}_j)\} \quad (18)$$

と書くことができる． $\det^{(+)}$  は行列式の中の  $\sigma$  をすべて 1 にしたもので，パーマメントと呼ばれる．

### 課題

ボース粒子系で，ある 1 粒子状態  $\varphi_{\text{ini}}$  にある粒子が摂動を受けて別の 1 粒子状態  $\varphi_{\text{fin}}$  に遷移する過程を考える． $\varphi_{\text{fin}}$  がすでに  $N$  個の粒子で占有されている場合，遷移確率は  $\varphi_{\text{fin}}$  が全く空の場合に比べて  $N + 1$  倍になることを示そう．