

講義ノート「低温物理学」 No.2

2009.4.16

物性研究所 勝本信吾

2.2 レーザー冷却

ボース凝縮，あるいはその類似現象が劇的な形で現れたのが，超流動である．が，これは Part II で見ていくことになると思うので，それより更に下って 1995 になって実現された中性原子気体の BEC について見ていこう．なお，広い意味で言うと，例えば，信号を伝える様々な電波などは，同じ状態に多数の光子 (ボソン) が存在した状態であり，ボース凝縮を起こしているのだ，という捉え方も可能である．そう考えれば，レーザー光もその一種であると見ることができる．まさに，高いエネルギーを持つ光子の集団であるはずのレーザー光が非常に低温を実現できる所以でもある．

2.2.1 中性原子気体の転移温度

レーザー冷却によって初めて実現したボース凝縮は，ルビジウム (Rb) 原子気体によるものであった．ルビジウム気体をボース凝縮させるにはどの程度冷却すれば良いか簡単に見積もってみよう．

波束としての原子は，空間的には λ_D 程度以上に広がっている．この気体の原子密度を n とすると，平均原子間隔 $n^{1/3}$ が λ_D 程度になると波動関数同士が重なり合い，BEC が発生する．従って T_c は

$$T_c = A \frac{h^2}{2Mk_B n^{2/3}} \quad \left(A = \frac{1}{\pi} \zeta \left(\frac{3}{2} \right)^{-2/3} \right) \quad (19)$$

と見積られる．係数 A は統計力学的な計算による補正である．この温度は，アルカリ原子気体の実現可能な密度を使うと数百 nK と非常に低くなり，従ってこのような低温をいかに実現するかが問題となる．

2.2.2 ドップラー冷却

ボース粒子である原子 (^{87}Rb など) を加熱蒸発させて気体にする．炉から真空へ飛び出してきた室温程度の原子気体をまず一気に冷却するのがドップラー (Doppler) 冷却である．その理解のためには，原子の電子状態の知識が必要であるが，ここでは，次のように簡単化しよう．原子の中の電子は，3次元方向すべてについて，原子核の作るクーロンポテンシャルに閉じ込められた波動である．従って軌道エネルギーは離散化する．ある準位が電子で占有されていて，その上の準位が空いている，とする．この2つの準位の間は光励起により遷移可能とし，これ以外の準位は無視する．準位間隔を $\Delta\epsilon$ とすると，この原子の光吸収係数は，振動数 $\nu_0 = \Delta\epsilon/h$ の周りに図1のようにガウス分布形状に広がっている．

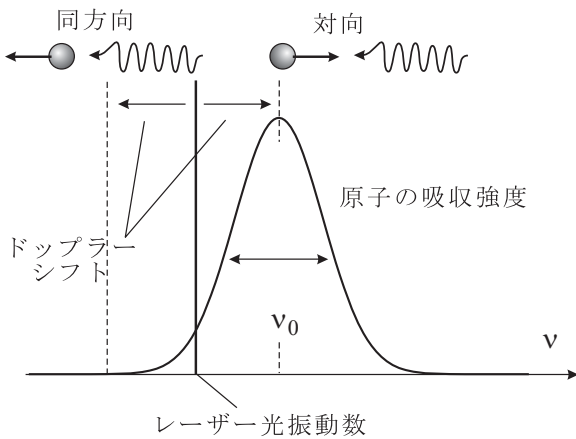


図 1: ドップラー冷却の原理の模式図．原子の光吸収係数は，中心振動数 ν_0 の周りに自然幅分だけ広がっている．冷却用レーザー光は，原子の平均速度に対するドップラーシフト分だけ低い振動数にセットする．レーザー光に対向して走る原子は効率よく減速され，同方向に走る原子はこの光からは力を受けない．

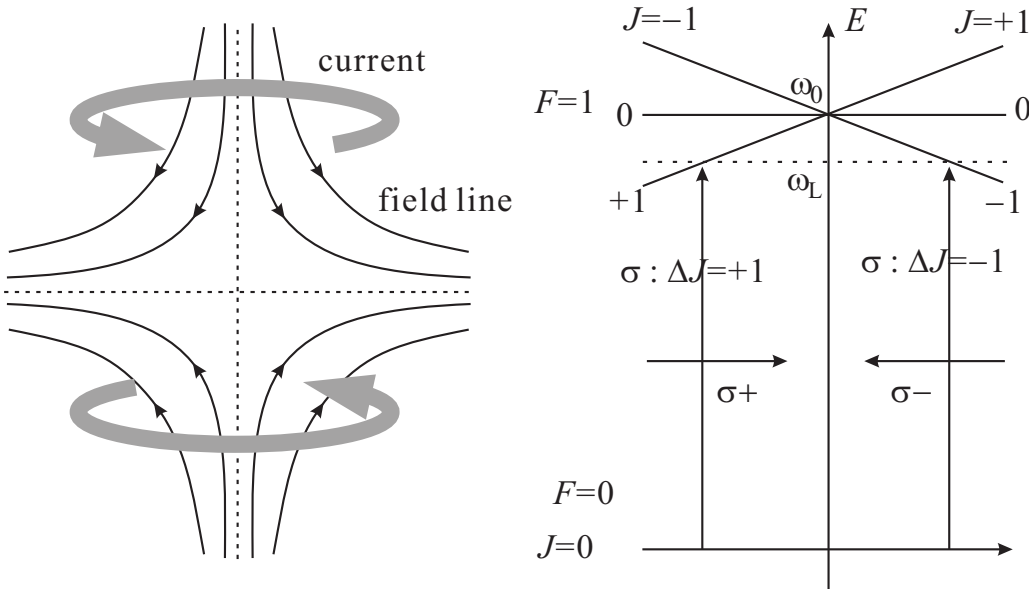


図 2: MOT の模式的説明図．左：上下のコイルに反対向きの電流を流し磁場を発生すると，中心付近では磁場は相殺して零になり，中心から離れると左右で反対の向きの磁場が強くなる領域が発生する．右：コイル中心の左右から回転方向の異なる円偏光を入射．光の圧力が常に中心に向かうようにすることができる．

2.2.3 磁気光学トラップ, Magneto-Optical Trap, MOT

ドップラー冷却するだけでは，遅くなった原子は重力によりやがてレーザーの交差点より落下するため，空中に止めるために磁気光学トラップを用意する．これは，不均一磁場と偏光によって圧力をトラップの中心に向けるものである．

現実には様々な状態を持った原子を相手にしなければならないが，簡単のため，基底状態は全角運動量 0，励起状態は 1 であるとしよう．もちろん，実際の原子はこれよりずっと複雑である．スピン軌道相互作用を考えると，これらの状態は，磁場によって Zeeman 分裂を起こす．図 2 左図のように対向するコイルに逆向きの電流を流すと，磁力線の分布は図のようになり，2 つのコイルの中間点付近では，中央部分より外部の方が磁場が強い状況が生じる．ちょうど中間点では，磁場は相殺して零になり，外部では有限となる．

従って，原子の位置 x に対して，原子の電子状態は，磁気量子数 M に応じて図 2 右図のように，3 つに Zeeman 分裂する．磁場の向きは原点で反転するため，図のように Zeeman 分裂の

上下関係も反転する。ただし、量子化軸は左右で共通にとってある（磁場の向きに量子化軸を取ると原点で反転するため符号がこの図とは逆になる）。

ここで、原子の励起に円偏光を使い、また6方向から照射するが、ここで更に簡単のため、1次元 x 方向だけを考える。トラップしたい中心に向かって右から左円偏光 $\sigma-$ を照射する。この時、図のように、例によってレーザー光のエネルギーをやや低めに離調しておく。遷移の選択律は $\Delta J = -1$ であるから、トラップの右側では光を吸収し、中心近くで磁場が弱くなると光を吸収しなくなり、左側ではこの光は吸収しない。左側からは右円偏光 $\sigma+$ を照射する。左側でも以上と対称なことが生じ、左側では右に向かって光の圧力が生まれる。以上のようにして、原子集団を空間の一部に閉じ込めることができる。

MOT の中では、幸運なことに、偏光勾配冷却現象が生じ、原子気体はドップラー限界を超えて冷却される（詳細略）。

2.2.4 磁気トラップ

MOT のエネルギーダイアグラム（図2右）を見ていると、原点で磁場が反転しなければ、例えば $J = +1$ 状態の原子にとってはそのままトラップポテンシャルになっていることがわかる。

$F \neq 0$ の状態が基底状態であるような原子に対して、実際にそのような磁場分布（原点でゼロ磁場になる必要はなく、安定にトラップするにはむしろ原点でも同じ向きに磁場があった方がよい）を作って原子をトラップするのが磁気トラップである。磁気トラップでは当然、一方向にスピンも含めた角運動量が揃った原子のみがトラップされる。概念図は図3に示している。トラップされた集団に光を当てると原子スペクトルにて発光するので空中に浮かぶ光る固まりとして観察できる。図4(a)にその様子を示した（駒場の久我・鳥井研究室での実験）。

2.2.5 蒸発冷却

磁気トラップは一方向の全角運動量を持つ原子をトラップし、反対向きの原子は放出する。これを上手に使用することで蒸発冷却ができる。蒸発冷却の原理は極めて簡単で、エネルギーの高い原子のみ選別してトラップから放出する。コーヒーカップが冷める際に、エネルギーの高い分子がコーヒーから飛び出すのも、自然な蒸発冷却になっている¹。

蒸発冷却を行うには、図3のように、磁気トラップを使う方法が一般的である。Zeeman 分裂の大きさは、図3下の図のように、トラップより離れるほど大きくなる。エネルギーの大きな原子は、トラップでも周辺部にいる確率が高い。そこで、周辺部の Zeeman 分裂に一致するラジオ波 (rf) の電磁波を照射すると、この部分を通過する原子が磁気モーメントの回転を起こし、トラップの外部に排出される。これは、結局、高エネルギーの原子のみ除去する過程に他ならない。

この時、重要なのは、残った低エネルギーの原子同士が衝突によってエネルギーを再分配し、より低温の分布になることである。これがうまく起こらない H 原子などでは、蒸発冷却の効率が悪くなる。冷えた状態で更に周波数の低い rf を照射することで、更に温度を下げることができる。

¹もちろん、コーヒーが冷める際は、水分子同士の引力ポテンシャルに起因する相転移の潜熱が奪われる。が、これも意味を広く取れば蒸発冷却の一種と言える。

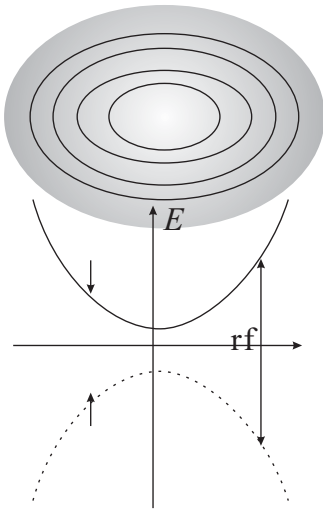


図 3: 磁気トラップを使った蒸発冷却の概念図．上の図は，磁場の強さを濃淡で表し，等磁位線を描いたもので，トラップ中心より外に行くほど磁場が強くなっている様子を示している．この時，簡単のため，原子の基底状態の全角運動量を $1/2$ とすると，磁場による Zeeman 分裂で，下の図のようなエネルギーダイヤグラムとなる．ここで，横軸はトラップ中心からの距離である．Zeeman エネルギーとしては高いスピン状態の原子がトラップされ，低いエネルギーの原子が放出される．従って，トラップ中の原子の角運動量は磁場と反対方向となる．ここにラジオ波 (rf) を照射することで，磁気モーメントを回転させ，エネルギーの低い状態にしてトラップ中から放出する．

2.3 レーザー冷却された原子気体の実験

レーザー冷却により nK 領域まで温度が下がった原子気体の実験は，90 年代後半より爆発的な進歩を遂げた．ただ，その「爆発」の道筋の多くは，すでにヘリウムを使った量子液体・固体の実験で得られた道標に沿い，そこに修正や拡張を加えていったもの，と言えなくもない．最近研究のペースは分野外から客観的に見て明らかにスローダウンし，これらの研究が本当のフロンティアに到達した事が明瞭になってきた．今後，新奇性の更に強い現象が発見されることを期待したい．

この講義では，しかし，BEC が生じた系一般に現れる諸現象を見ていくのに好適な実験としてこれらの系での実験をざっと眺めてみることにしよう．

2.3.1 BEC の観察

冷却原子集団の観察に最も一般的なのは，Time Of Flight (TOF) 法である．トラップした集団を，トラップポテンシャルを切って，重力で下に落とす．運動エネルギーの大きな原子は中心から次第に離れるので，適当に広がった所で，これに横方向より光を当てて吸収イメージングを行う．像からトラップ中での運動エネルギー分布を再構成することができる．簡便であるため最も良く使用される．破壊的な測定であり，1 度の測定のためにトラップ，冷却を繰り返す必要がある．

図 4(b) に BEC の発生がどのように観察されるか示した．

2.3.2 BEC 波動関数

このようにして発生する BEC 波動関数は，結果として特異な性質を持つ．1 粒子の量子力学では，波動関数が「確率振幅」という意味を持っていた．すなわち， ξ を何らかの物理パラメーターとして ξ 表示での 1 粒子波動関数が $\psi(\xi)$ であったとすると， ξ 空間内で測定をしたとき，微小体積 $d\xi$ ($\xi = \xi_0$) 中にこの粒子を見いだす確率が $|\psi(\xi_0)|^2 d\xi$ で与えられる．今， ξ 空間で強い測定を行ったとすると，測定結果は 0 か 1 かに量子化されている．しかし，マクロな回数だけ測定を行えば，その分布は $|\psi(\xi)|^2$ で与えられる．

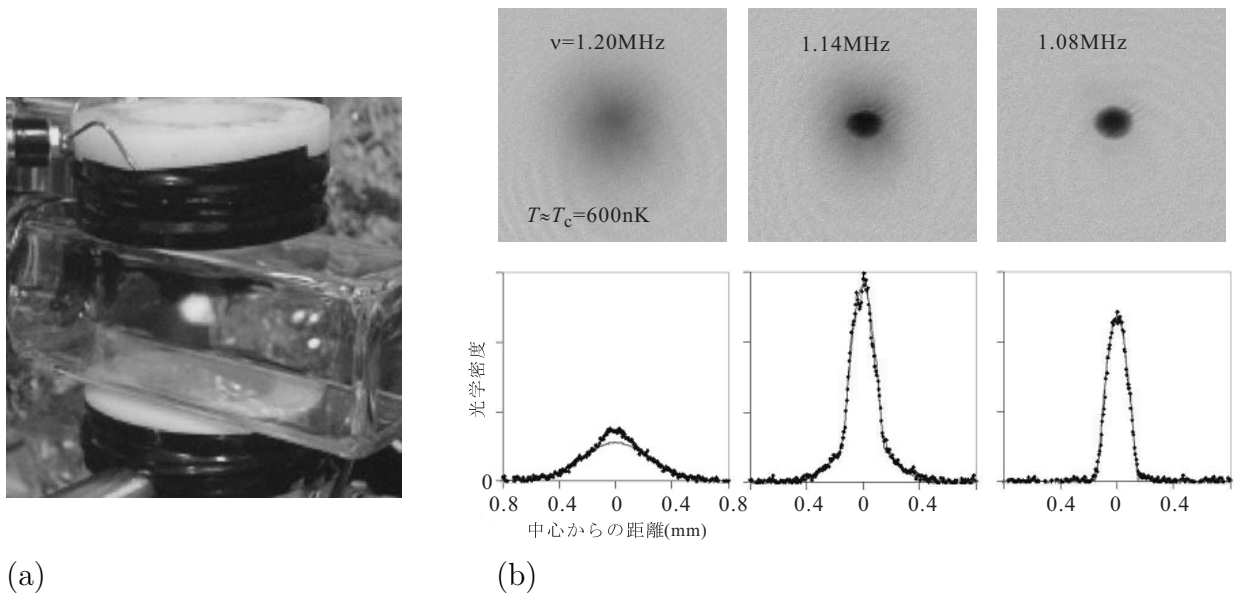


図 4: (a) 磁気光学トラップで真空中に浮かんでいる Rb 原子気体．この写真では中央に白く見えているが、実際の発光色は赤色である．(b) 蒸発冷却による Rb 原子気体の BEC の生成．照射する RF の周波数 ν が低くなるにつれて温度は低下する．雲のようなイメージは、トラップを切って原子気体を落とした時に、気体が広がる様子を光吸収で調べたもの．温度が下がって凝縮成分が増えると、広がりが小さくなる．(東京大学総合文化研究科鳥井寿夫先生提供)

一方、BEC 波動関数では、マクロな数の粒子が同一波動関数状態を占めている．従って、1 度の測定であってもマクロな回数の測定を行ったのと 1 粒子的には同じである．これは、本来、多粒子で考えれば粒子数と共に測定パラメタ空間の次元数も増えるはずだったのに対して BEC によって 1 粒子の時とパラメタ空間の次元数が同じになってしまったためと見ることもできる．

いずれにしても、BEC 波動関数に関しては、1 回の測定で分布が現れるため、実効的に「確率密度関数」ではなく、単純に「粒子密度関数」と考えて良いことになる．粒子密度関数であれば、その波動のふるまいは実質的に古典的な波動と同じであり、これを支配する方程式が量子多体問題のそれになる、ということである．このため、物質波があたかも古典的な波動のように観測される．このような波動関数をマクロ波動関数と呼ぶ．また、マクロ波動関数が古典的な波動として振舞うことは、見方によっては量子力学がマクロなスケールで出現したようにも見えることから BEC に生じる様々な波動現象をマクロ量子現象と呼ぶこともある．ただし、この用語は要注意である．というのは、多数自由度が束ねられてできたマクロな自由度がまさに量子的効果を示す文字通りの量子現象にもマクロ量子現象という言葉が使用されることが増えてきたからで、最近では後者の用語法が増え、前者は紛らわしいために頻繁には使用されない傾向にある．

2.3.3 BEC 同士の干渉

「20 世紀の最も美しい物理実験」として有名な外村博士の電子波干渉実験は 2 重スリットを通った電子波が、スクリーン上で位置を特定する測定を行うと「点」として測定されるが、測定を続けて点の数を増やすと、その分布は 2 つのスリットからの緩衝効果が現れている、とい

うものであった。

BECのマクロ波動関数について同じ事を行うとどうなるか。当然ながら測定される粒子密度に干渉パターンが現れる。BECの干渉効果は、(実験ではスリットではなくレーザーによるポテンシャルを使用するが) 2つに分かれたBECの間に位相コヒーレンスがあることを示している。

3 超伝導

超伝導は、電子が対(クーパー対)を作って凝縮する現象である。電子はフェルミオンであるため、そのままでは凝縮することはできないが、何らかの原因で対を作れば、対としてはボソンであるため、BECを起こすことができる・・・というのは一見明快な見方であるが、「対を作る」というのは何を持って「作った」と認められるのか、そもそも強力なクーロン反発力が働いている電子が対を作れるのか、など、疑問は尽きない(だからこそ、発見からBCS理論まで50年近くを要した)。

ここでは、まず凝縮体の特性から超伝導を現象論的に眺め、続いてBCSの基本的考え方を見ていこう。

3.1 BECファミリーに共通する現象

「凝縮」とは、何らかの原理により多粒子の自由度を持っていた系が1つの量子状態に落ち込むことで自由度を失い、少数自由度のマクロ波動関数で記述できるようになることである。それぞれ、凝縮現象は同一ではないが、共通項が存在する。まず、超伝導現象にGinzburg-Landauの現象論による視点を得た後、これら共通の現象を見ておこう。

3.1.1 Ginzburg-Landau 理論

超伝導、超流動の両方に適用可能な現象論であるGinzburg-Landau (GL)の理論についてごく簡単にまとめておく。今、超伝導が生じる系(もちろん主役は電子系であるが、電子だけでは超伝導にはならない。それ以外の自由度も含めて、dress upした電子系)の自由エネルギーを F とする。超伝導転移が起こると、自発的対称性の破れが生じて秩序パラメタ ψ が発生する。GLはこれを複素数に取った。これは、一種のマクロ波動関数と見る事ができる。normal状態でのfree energyを F_n として、 F を ψ で展開する。

$$F - F_n = V(-a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4) \quad (20)$$

この F の関数形は、 T_c (臨界温度)を境に図5のように、変化するはずである。この形状から、 b は T_c では大きな変化がなく、 a は T_c で符号が変化するはずである。そこで、

$$a \simeq \alpha(T_c - T), \quad b = \beta \quad \alpha, \beta > 0 \quad (21)$$

と置こう。すると簡単に

$$|\psi_0| = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad F_s = \frac{a^2}{2b} \quad (22)$$

が得られる。

空間的な分布を考えるために ψ は空間座標の関数 $\psi(\mathbf{r})$ であるとしよう。この時は、 F は、もちろん、(20) の簡単な表式では表されない。そこで、量子力学に習って、 F は ψ と $\nabla\psi$ との関数である、としよう。

$$F = \mathcal{F}\{\psi(\mathbf{r})\} = F\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\right) \quad (23)$$

また、超伝導と超流動との現象論的な大きな違いは、超伝導を引き起こしている粒子系は電荷を持つ電子（あるいは Cooper 対）であり、ゲージ場である電磁場との結合が強いという点である。これは、超伝導の磁場に対する敏感性（臨界磁場 H_c で超伝導が消失する）や磁束を排除する Meissner 効果に現れている。今、磁場 H のエネルギー密度は、 $\mu_0 H^2/2$ であるから、超伝導が壊れる磁場 H_c では、これが超伝導による F の利得 F_s に等しいと考えられる。

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{a^2}{2b} = \frac{\mu_0}{2} H_c^2 \\ H_c &= \frac{a}{\sqrt{\mu_0 b}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 b}} \alpha(T_c - T) \end{aligned} \quad (24)$$

更に、 F は当然、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を含む形になるはずである。今、 \mathbf{A} に対して、ゲージ変換

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}}$$

を施したとすると、電荷 e を持つ粒子の波動関数 $\varphi(\mathbf{r})$ は

$$\varphi(\mathbf{r}) \longrightarrow \varphi'(\mathbf{r}) = \exp\left\{i\frac{e}{\hbar}\phi\right\} \varphi(\mathbf{r})$$

と変換される。マクロ波動関数（秩序パラメタ）が、電荷 $2e$ を持つ Cooper 対の「波動関数」をマクロ化したものとみなせることを考えると、これは、電荷 $2e$ を持つ荷電粒子の波動関数として変換されるはずである。

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \psi'(\mathbf{r}) = \exp\left\{i\frac{2e}{\hbar}\phi\right\} \psi(\mathbf{r}) \quad (25)$$

一方、 F はゲージ不変な実数でなければならないから、(23) と (25) を考慮し、 \mathbf{A} 、 $\nabla\psi$ 、 ψ の実でゲージ不変な組み合わせを考えなければならない。最も簡単なものとして、

$$\left| \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar}\mathbf{A}\psi \right|^2$$

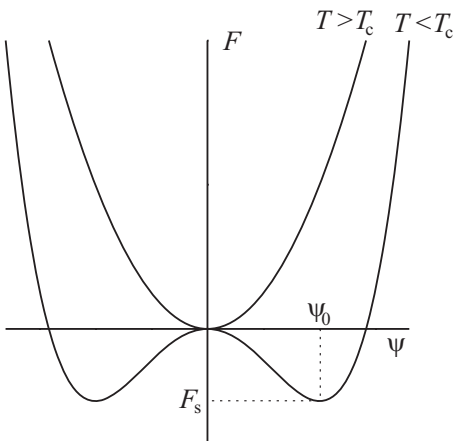


図 5: 秩序パラメタ ψ に対する超伝導体の自由エネルギー F の変化。GL 理論にしたがって単純化したもの。

が考えられる．

以上をすべて考慮して， F を書き下すと

$$F - F_n = \int d\mathbf{r} \left\{ -a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0}(\text{rot } \mathbf{A})^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar}\mathbf{A}\psi \right|^2 \right\} \quad (26)$$

となる．この F の ψ ， ψ^* ， \mathbf{A} についての変分をとると，

$$\mathbf{j} \equiv \frac{\hbar e}{mi} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{r}} \psi \right) - \frac{4e^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (27)$$

とにおいて，

$$\begin{aligned} \delta F = & \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2\mu_0} \delta \mathbf{A} \cdot \{ \text{rot rot } \mathbf{A} - \mu_0 \mathbf{j} \} \right. \\ & \left. + \delta \psi^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi - a\psi + b|\psi|^2\psi \right\} + \text{c.c.} \right] \\ & + \int_S d\mathbf{n} \cdot \left[\frac{1}{2\mu_0} \delta \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} + \delta \psi^* \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \right) \psi + \text{c.c.} \right] \end{aligned}$$

となる． $\delta F = 0$ とにおいて，最初の項からは

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (28)$$

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi = a\psi - b|\psi|^2\psi \quad (29)$$

の2式が得られる．Maxwell 方程式 (28) と London 方程式を組み合わせることで Meissner 効果
が得られ，(29) は Ginzburg-Landau (GL) 方程式（非線形 Schrödinger 方程式）である．第2項
からは，超伝導体表面において

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - i\frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \right) \psi = 0 \quad (30)$$

が得られる．これは，GL 方程式を解いて ψ を求める際の境界条件を与える．臨界温度付近で
は， ψ が小さいため，(29) の非線形項を無視する近似が比較的良く成立する．この b の項を落
とした方程式を線形化 GL 方程式と呼ぶ．

参考文献

- [1] 久我隆弘 「量子光学」(朝倉書店，2002)．
- [2] 超伝導・超流動の良い入門書は多数あるが，我田引水で，勝本信吾，河野公俊「超伝導・
超流動」(岩波書店，2006) を挙げておく．