講義ノート「低温物理学」 No.3

2009.4.23
物性研究所　勝本信吾

超伝導・超流動に特有な多くの現象は，GL 理論によって半定量的に説明することができる．ここではその一端を紹介しよう．

3.1.2　超伝導に特有な長さ

簡単のため，y,z 方向には空間変化がない，としよう．すると，x 方向の 1 次元 GL 方程式を考えればよい．ここで，

$$\xi^2 \equiv \frac{\hbar}{2m|a|} \tag{31}$$

とおき，更に ψ を (22) の ψ_0 で規格化して $\zeta \equiv \psi/\psi_0$ とすると，磁場がない場合の GL 方程式は

$$-\xi^2 \frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}x^2} - \zeta + \zeta^3 = 0 \tag{32}$$

と書ける．

今，何らかの原因により一部で超伝導が壊れて $\zeta = 0$ になったとしよう．ここを $x = 0$ に取ると，この時の境界条件は，$\zeta(0) = 0$ で，また，ここから十分離れたところ ($x \to \infty$) では超伝導は十分回復しているとすると，$\zeta = 1$，$\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}x = 0$ である．この時，

$$\zeta(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \tag{33}$$

と置くと，これはこの境界条件を満たす (32) の解になっていることがわかる．この形から，超伝導の回復には ξ 程度の距離が必要であること，言い換えると，秩序パラメーターが空間変化するためには ξ 程度の距離を必要とすることがわかる．この ξ を GL の**コヒーレンス長**と呼ぶ．ξ は (**??**), (31) より，T_{C} 近傍では，

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\alpha(T_{\mathrm{C}} - T)}} \tag{34}$$

という温度変化をする．

バルク超伝導体では，適当なゲージを選べば，位相が硬い（$\nabla\theta = 0$）と考えると，London 方程式

$$\boldsymbol{j} = -\frac{4e^2}{m}\rho\boldsymbol{A} \tag{35}$$

が得られる．これと Maxwell 方程式 (**??**) より，

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B} \tag{36}$$

となって，超伝導体中では磁場が，侵入長

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{mb}{2\mu_0 e^2 a}} \tag{37}$$

のオーダーで減衰することがわかる．

この２種類の特徴的な長さの比 κ は **GL パラメーター**と呼ばれ,

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m}{q\hbar}\sqrt{\frac{2b}{2\mu_0}} \tag{38}$$

となって温度によらない．

3.1.3 渦の量子化 (その 1)

凝縮体中に環状に流れる閉じた流れがある時，その量子化が起こる．これは，凝縮体が「マクロ波動関数」の性質を有しているため，水素原子の場合の量子力学的波動関数の閉じ込めと同様，閉じ込め効果が現れたものである．この「渦の量子化」は従って，原子での角運動量の量子化と同根の現象である．

凝縮体の流速密度 $\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ は，確率密度流を計算して

$$\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar\rho}{M}\nabla\theta(\boldsymbol{r}) \tag{39}$$

である．

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{or} \quad \oint_c \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{40}$$

(40) の第１式から第２式（積分形）を導くには，Stokes の定理を使うが，その際,「空間を一周して元の点に戻ると θ は完全に元の値に戻る」という θ の空間的一価性が仮定されている．これが成立するためには，(i) 空間が単連結であること，(ii) 考えている領域で，θ に特異点がないこと，が当然必要である．

従って，単連結でないような状態では，非単連結領域（要するに穴）を囲む積分路の場合，積分はゼロにならない．しかし，マクロ波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 自身は元に戻らなければならない．これが，図 1 のようなリング形状の管の中を流れる超流動体の流れに強い拘束条件を与える．

すなわち，今，管の断面内では ψ の位相が一定であるとすると，管長 L が波長 $\lambda = 2\pi/k$ の整数倍でなければならず,

$$k = n\frac{2\pi}{L}, \quad n : \text{整数} \tag{41}$$

と，波数の量子化が起こる．(39) より,

$$v = n\frac{h}{M}\frac{1}{L} \quad \therefore \oint_C v ds = n\frac{h}{M} \tag{42}$$

と，流速を積分したものが h/M を単位として量子化する．h/M を循環量子 (circulation quantum) と称する．図 1 のように，この量子化状態の間を移動するには，超流動体に何らかの乱れを導入する必要があり，有限のエネルギーの励起を必要とする．これは，リング全体が一種の原子の類似体になったと見ることもできる．すなわち，atomic orbital は量子化によって生じたものであり，orbital 間の遷移は飛び飛びになって，連続的にエネルギーを失うことはない．

系の形を多重連結にするのではなく，$\theta(\boldsymbol{r})$ に特異点をつくることでも，この積分は有限となる．この場合，結局特異点周辺では超流動状態が壊れており，その周りを超流動体が周回している．このような状態（object と呼んでも良い）を渦糸 (vortex) と呼ぶ．(42) の量子化は当然 vortex でも生じる．

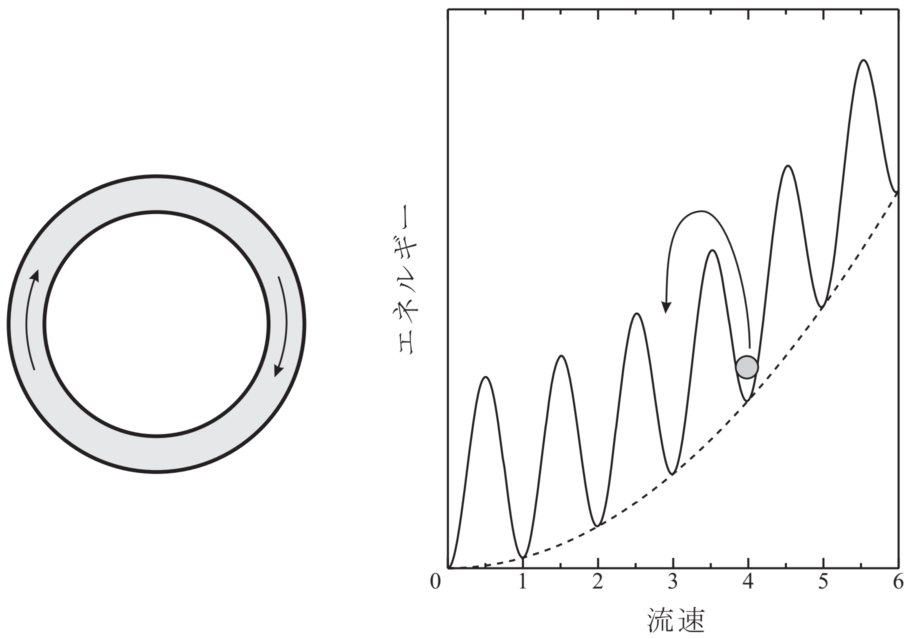

図 1: 左：リング状の管を流れる凝縮体．右：この状態での，凝縮体のエネルギーの模式図．

3.1.4 超伝導における「抵抗ゼロ」の意味

比較的弱い磁場，小さな電流の下での超伝導体においては文字通り抵抗率が完全にゼロになると考えて良い．これは例えば，超伝導体で円環を作って環状電流を流すと，何年にもわたり電流の減衰が実験の検出限界以下であることからも確かめられる．

このような「抵抗ゼロ」は通常の電気伝導の抵抗率ゼロ極限では得られないことが簡単にわかる．ドルーデの電気伝導度は $ne^2\tau/m$ で与えられるから，電子の散乱時間 τ が無限大になれば伝導度は発散し抵抗率は形式上ゼロとなる．これは,「散乱のない電子気体」である[1]．が，これでは常伝導状態で磁場を与えておいて転移点よりも温度を下げると磁束が外部に排出されるマイスナー効果を説明できない．すなわち，常に $dB/dt = 0$ であるため誘導起電力は発生せず，従って特別な反磁性は生じない．

更に，このような「抵抗ゼロ極限」では環状電流は減衰する．空間的に環状である，ということは荷電粒子の流れが加速度を持っていると言うことであり，この場合，加速度に応じた電磁波の放出が起こる．このため，電流はゆっくりと (もちろんその速さは円環の大きさに依存する) 減少する．

これは，長岡-ラザフォードの原子模型が出て，原子の世界に古典物理学を適用しようとしたときの困難と同根である．すなわち，古典原子模型では電子が円運動をするために電磁波を輻射してどんどんと運動エネルギーを失い，原子核に落ち込んでつぶれてしまう．これを救ったのが量子力学であり，電子は波動性とフェルミ粒子としての統計性を持ち，波動性によって最低エネルギー (零点エネルギー) が生じて電子はそこから順に詰まっていくため，原子がつぶれることはない．

超伝導体のリングも同様に，マクロ波動関数の波動性が電流の減衰を妨げていると考えられる．ただし，基底状態は明らかに電流ゼロの状態であり，ここに落ち込んでしまわない理由は

[1]電子間散乱は電子気体の内力であるため，運動量を保存し，全体としての抵抗率に寄与しない．

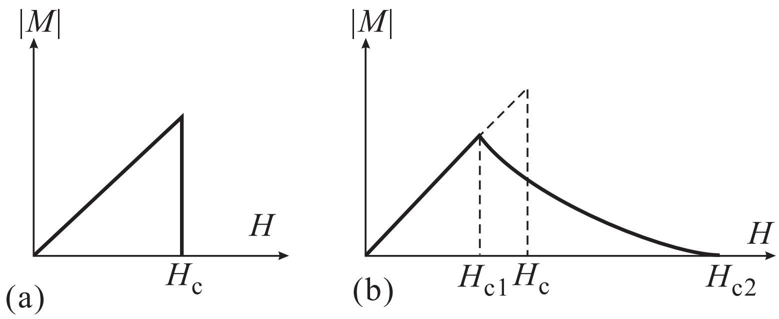

図 2: (a) 第 I 種超伝導体の磁化の絶対値 $|M|$ を外部磁場 H の関数として模式的に描いたもの．臨界磁場 H_c で超伝導が急激に破れる．(b) 第 II 種超伝導体について同様に描いたもの．

原子とは異なる．これは円環を流れる超流動と同じく，量子化値の間の自由エネルギー障壁が極めて大きく，ここを系が越えて落ちていく確率は限りなくゼロに近いためである．逆に言うと，このエネルギー障壁に何らかの綻びがあると，系がそこを通り抜けて超伝導電流は減衰してしまう．高温超伝導体の実用化がなかなか進まない大きな要因の一つである．

3.1.5　第 I 種，第 II 種超伝導体

ここで，超伝導体には現象的に分類して第 I 種と第 II 種の２種類があることを見ておこう．

第 I 種に分類される超伝導体の多くは比較的低い転移温度を持つ金属である．第 I 種超伝導体に外部磁場を印可すると，マイスナー効果によって完全反磁性が生じ，磁束は超伝導体外部に閉め出される．この状態では，超伝導体の磁化 M は丁度外部磁束密度 B の符号を変えたものに等しい．外部磁場が臨界磁場 H_c に達すると，超伝導が破れて正常金属状態に戻り，磁化はパウリ常磁性とランダウ反磁性で決まる値になるが，これは一般に完全反磁性に比べて非常に小さいので，図 2(a) に示したような三角形状の磁化変化を示す．

これに対して，第 II 種超伝導体では図??(b) のように，ある磁場 H_{c1} までは完全反磁性を示すが，磁場が H_{c1} を超えると磁化の大きさ $|M|$ は減り始める．第 I 種のように不連続に落ちるのではなく，$|M|$ はキンクを示すが連続的に落ち続け，H_{c1} よりもかなり高い磁場 H_{c2} で超伝導が破れる[2]．

この，H_{c1} と H_{c2} との間の磁場では，渦糸 (vortex) と呼ばれる局所的に超伝導が破れて磁束が入り込んだ状態が超伝導体全体にばらまかれている．このような状態を**混合状態** (mixed state) あるいは渦糸状態 (vortex state) と呼ぶ．H_{c1} 以上で $|M|$ が減少していく過程は，超伝導体に１本１本渦糸が入り込んでいく過程に対応している．

第 I 種と第 II 種は，3.1.2 節で述べた，特徴的な長さの大小関係によって決まっている．すなわち，超伝導体の渦糸の芯の部分では超伝導が壊れて正常状態になっているから，ごく大まかには半径 ξ(コヒーレンス長) 程度の円の外側は超伝導が回復している．一方，芯の部分に入っている磁束は超伝導体の内部では λ(磁場侵入長) 程度で減衰する．渦糸が超伝導体中に存在するためには，$\xi < \lambda$ であることが必要である．すなわち，第 I 種と第 II 種を分けているのは ξ と λ の大小関係であると言うことができる．

実際，GL 方程式を使って H_{c1}，H_{c2} を計算し，渦糸状態が現れるための条件である $H_{c1} < H_{c2}$ を課すと，$\sqrt{2}\lambda > \xi$ が得られ，これが第 I 種，第 II 種の境界である．

[2] 第 I 種であっても，超伝導体の形状によっては，反磁場の効果により磁束が所々に通った状態が生じることがある．これを中間状態 (intermediate state) と呼ぶ．

3.1.6　渦の量子化 (その 2)

渦の量子化 (その 1) では，環状流を考えその流量が量子化することを見た．その意味では正確には「渦の量子化」とは言えなかったが，ここで超伝導体の渦糸における量子化を考える．原理的には全く同じであり，超流動体においても同様に渦の量子化が生じる．

渦糸部分は磁束が超伝導体内に入り込んでおり，その周囲に超伝導電流が環状に流れて内部への侵入を防いでいる．一方，芯から遠く離れた領域を考えると，磁束はなく超伝導電流 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ である．今，超伝導電流の表式 (27) に $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$ を課すと，

$$\boldsymbol{j} = \frac{e\rho}{m}\left(\hbar\nabla\theta - 2e\boldsymbol{A}\right) \tag{43}$$

が得られる．芯から遠く離れた領域で，芯を取り囲む経路 C 上でこれを線積分すると，C の取り囲む面積を S として，

$$\oint_C \left(\hbar\nabla\theta - 2e\boldsymbol{A}\right)\cdot d\boldsymbol{s} = nh - 2eBS = 0$$

である．ここで，n は整数で，結局渦糸全体を通っている磁束 $\Phi = BS$ は

$$\Phi = n\frac{h}{2e} \equiv n\Phi_0 \tag{44}$$

となり，**磁束量子** (flux quantum) $\Phi_0 \equiv h/2e$ を単位として量子化する．

参考文献

[1] 超伝導・超流動の良い入門書は多数あるが，我田引水で，勝本信吾，河野公俊「超伝導・超流動」（岩波書店，2006）を挙げておく．

[2] B. D. Josephson, Phys. Letters **1**, 251 (1962).

[3] Aslamasov, JETP Lett. **9**, 87 (1969).