

# 講義ノート「低温物理学」 No.4

2009.4.30

物性研究所 勝本信吾

## 3.1.2 渦糸の量子化(その2, 続き)

単一の渦糸について, GL方程式に沿って渦糸構造を考えよう. 芯が原点にあるとすると, 軸対称性を考え,

$$\psi = \psi_0 f(r) e^{i\theta} \quad (31)$$

とおく. 磁場も軸対称であるから, 原点から距離  $r$  の磁場を  $h(r)$ , また, ベクトルポテンシャル  $A$  は, 角度  $\theta$  方向の単位ベクトルを  $\theta$  と書いて

$$A = A(r)\theta \quad (32)$$

と書ける.  $A(r)$  はベクトルポテンシャルの定義より

$$A(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' h(r') dr' \quad (33)$$

となるべきである. 芯の中心付近でも  $h(r)$  に特異性はないであろうから,

$$A(r) \approx \frac{h(0)r}{2} \quad r \sim 0.$$

一方, 十分遠方では磁束の量子化から

$$\oint_C A \cdot ds = 2\pi r A_\infty = \Phi_0 \quad \therefore A(r) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi r} \quad r \sim \infty$$

である.

(31)をGL方程式(29)に代入すると,  $f$  について次の非線形方程式が得られる.

$$f - f^3 - \xi^2 \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right)^2 f \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) \right] = 0. \quad (34)$$

が, これには更に,  $A(r)$  が一般の  $r$  に対して含まれており, 超伝導電流も電磁氣的に含めて解かなければならない.

以上を数値的に解くことも行われているが, 簡潔に本質を見るため, 大幅な近似を行って渦糸の様子を見てみよう.

$\xi \gg \lambda$  の場合は,  $\xi$  より大きなスケールの変化を問題にする場合, 渦芯以外では  $\zeta = 1$  とする近似もあり得て, ロンドン極限と呼ばれる. 少々出てきた電流の表式

$$j = \frac{e\rho}{m} (\hbar \nabla \theta - 2eA)$$

について, 両辺の回転(rot)を取ると, 単連結の場合はもちろん, 右辺第1項のrotはポテンシャル流であるからゼロになるが, 今は  $r = 0$  に vortex が存在して超伝導が破れており, この特異点を取り巻く回転はゼロではなく,  $n = 1$  の vortex の場合, ストークスの定理より

$$\int_S \text{rot} \nabla \theta dr = \oint_C \theta \cdot ds = 2\pi$$

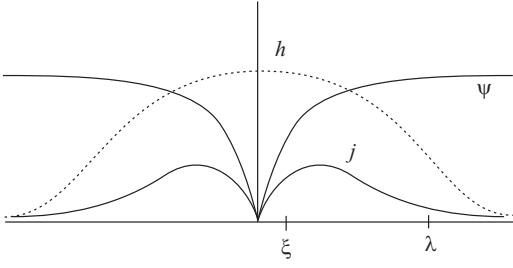


図 1: 渦糸周囲の秩序パラメーター  $\psi$ , 遮蔽電流  $j$ , 磁場  $h$  の様子を模式的に描いたもの.

であるから,  $\xi \rightarrow 0$  によって,  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \text{rot } \nabla \theta = 2\pi \delta(r) z$  である. ここで,  $\delta(r)$  は vortex 磁束に垂直な面内での 2 次元  $\delta$  関数で,  $z$  は  $z$  方向の単位ベクトルである. そこで, 磁場を  $h(r)$  と書くと, この近似は次の方程式の形にまとめられる.

$$\lambda^2 \text{rot } j + h = z \Phi_0 \delta(r). \quad (35)$$

$\text{div } h = 0$  より,  $\text{rot } j = \nabla^2 h$  であり,  $h$  は対称性より  $z$  成分のみを持ち, 更に円筒座標  $(r, \varphi, \theta)$  で考えると,  $h_z = h$  は  $r$  にのみ依存する. これについて (35) を書き直すと

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh}{dr} \right) - \frac{1}{\lambda^2} h = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \delta(r) \quad (36)$$

となり, これを  $r \rightarrow \infty$  で  $h = 0$  として解くと,

$$h(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left( \frac{r}{\lambda} \right) \quad (37)$$

が得られる.  $K_0$  は 0 次の変形 Bessel 関数で, 初等関数で表すことはできないが, 漸近形は

$$h(r) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left( \ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right) \quad (\xi \ll r \ll \lambda) \quad (38)$$

$$\approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left( \frac{\pi\lambda}{2r} \right)^{1/2} e^{-r/\lambda} \quad (\lambda \ll r) \quad (39)$$

と書くことができる.

以上の様子をまとめると, 図 1 のようになる.  $H_{C1}$  は, 渦糸生成のために必要な磁場エネルギー,  $\nabla \theta$  による秩序パラメーターの運動エネルギーの和と, 磁場排除のためのエネルギー上昇が等しくなる磁場であり, ここでは計算は示さないがここまでの近似の範囲では

$$H_{C1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \kappa \quad (40)$$

と求められる. 一方,  $H_{C2}$  は通常,  $n = 1$  の渦糸で超伝導体内が埋め尽くされる磁場であり,

$$H_{C2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2} \quad (41)$$

と見積もられる.

$n$  の値は量子化条件からは無数にとりうるが, 渦糸のエネルギーが  $n^2$  に比例することから  $n \geq 2$  の渦糸は通常はできにくい.  $n = 1$  の渦糸が超伝導体内でどのように配置しているのか見るために 2 本の平行な渦糸の間の相互作用を考える. 渦糸 1, 2 の位置を  $r_1, r_2$  とする. 磁

束密度  $B$  の下での磁束  $\Phi$  の持つ電磁エネルギーは  $\Phi B/2\mu_0$  であるから，この2つの渦糸系のエネルギー  $E_{12}$  はもう一方の渦糸の作る磁場 (37) 中に1つの渦糸を置いた時の電磁エネルギーの2倍と考えると，

$$E_{12} = 2 \frac{\Phi_0}{2} h(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0\lambda^2} K_0\left(\frac{r_{12}}{\lambda}\right) \quad (42)$$

と表される．特に (42) は重要な性質であり，距離の対数に依存することは，渦糸系が「2次元クーロンガス」[2] を実現した実体モデルとして考え得ることを示している．実際，Kosterlitz-Thouless 転移など非常に興味深い現象が実験的に見いだされている．

### 3.1.3 Josephson 効果

Josephson 効果が最初に発見されたのは，2つの超伝導体をトンネル接合でつないだ系 (Josephson 接合) である．以下では，とりあえずこのような系を仮定して議論を進める．しかし，以下の議論の中身でもわかるとおり，マクロ波動関数で記述される系に一般的な現象であり，原理的には BEC を示すどのような系で見えても良いはずである．実際，超流動ヘリウムでも，トンネルではないという意味ではやや Josephson 効果とは異なるが，AC-Josephson 効果に相当する音波の発振現象が観測され，レーザー冷却原子気体においても類似現象が見られている．

Josephson はトンネルハミルトニアン形式からよりミクロな導出を行ったが，ここでは，本質が見やすい形で，思い切り粗く，定性的な導出を行う．図のように，接合方向に  $x$  軸を取り，原点を左の超伝導体の右端，トンネルバリアの厚さを  $d$  とする．秩序パラメタ  $\psi$  の絶対値は最大で  $\psi_0 = \sqrt{a/b}$  であるから， $|u(x)| \leq 1$  の複素数  $u(x)$  を考えると，磁場が小さく  $A$  が無視できるという近似の下で，GL 方程式は

$$\xi^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u - |u|^2 u = 0 \quad (43)$$

と書ける．ここで，文献 [4] に従うと，(43) の中では， $d^2 u/dx^2$  の項が dominant であり，他は無視しても良い．すると，結局  $d^2 u/dx^2 = 0$  という極めて簡単な形になるので，

$$u(x) = \alpha + \beta x$$

と展開する．電極では秩序パラメタが完全な形  $|\psi| = \psi_0$  であるとすると，電極での境界条件は

$$\begin{cases} x = 0 & u = 1 \\ x = d & u = e^{i\theta} \end{cases} \quad (44)$$

であるから，

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \frac{x}{d} e^{i\Delta\theta} \quad (45)$$

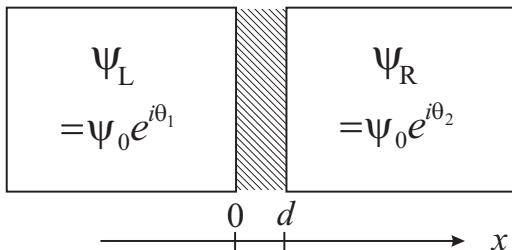


図 2: Josephson 接合の模式図

となる．第 1 項が左電極からのマクロ波動関数の沁みだし，第 2 項が，右電極からのしみ出しを示している．この時，再度，電流密度の表式

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi) \quad (46)$$

に，この秩序パラメタを代入して

$$\begin{aligned} j &= \frac{e\hbar}{2mi} \psi_0^2 \left[ \left\{ \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \frac{x}{d} e^{-i\Delta\theta} \right\} \left(-\frac{1}{d} + \frac{e^{i\Delta\theta}}{d}\right) - \left(1 - \frac{x}{d} + \frac{x}{d} e^{i\Delta\theta}\right) \left(-\frac{1}{d} + \frac{e^{-i\Delta\theta}}{d}\right) \right] \\ &= \frac{e\hbar}{md} \psi_0^2 \sin \Delta\theta \end{aligned} \quad (47)$$

が得られる．

(47) は，左右電極に電位差がなくても，位相差  $\Delta\theta$  によって有限な電流が流れうことを示している．これを直流 Josephson 効果と呼ぶ．(47) からわかるように，この電流密度には，最大値  $j_c$  が存在し，

$$j_c = \frac{e\hbar}{md} \psi_0^2 \quad (48)$$

である<sup>1</sup>．この最大電流を，Josephson 臨界電流と呼ぶ．

接合に電圧  $V$  が生じている時， $V$  は左右の電気化学ポテンシャルの差である．マクロ波動関数を  $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}$  と書き， $\rho$  は空間的に一定で時間変化もないとする．時間に依存する GL 方程式 (TDGL 方程式) も，線形化の範囲内では Schrödinger 方程式と同型に書け，定常状態では

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar \psi \frac{d\theta}{dt} = E\psi \quad (49)$$

となる．従って，電圧  $V$  状態は， $E_1 - E_2 = 2eV$  と書くことができ，

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{dt} = -\frac{2e}{\hbar} V = -2\pi \frac{V}{\Phi_0} \quad (50)$$

である．(50) を Josephson の加速方程式と呼ぶことがあるが，これを積分して (47) に代入すると，定数項を零として

$$j = -j_c \sin \left( 2\pi \frac{V}{\Phi_0} t \right) \quad (51)$$

となる．(51) は，電圧  $V$  が生じている時，超伝導電流は周波数  $f = 2eV/\hbar = V/\Phi_0$  で振動していることを示している．これを交流 (AC) Josephson 効果という．

Josephson 電流の式 (47) が非線形であることから，外部から一定周波数の摂動がかかると，AC Josephson 効果との間で干渉が生じる．接合に外部から周波数  $f_0$  のマイクロ波を加えたとするとき，接合は一種のアンテナとして働くため， $f_0$  の摂動が生じ，接合を定電流で駆動したとすると， $f$  を  $f_0$  へ「引き込もう」とする現象が生じる．このため，電圧が

$$V_n = n\Phi_0 f_0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (52)$$

の位置でプラトーを持つ電流電圧特性が得られる．図 3 に例を示した．このプラトーをシャピロ (Shapiro) ステップと呼び，電圧標準として使用されている．

<sup>1</sup>この値は当然， $\Delta\theta = \pi/2$  の時に得られる．また，基底状態は  $\Delta\theta = 0$  である．これに対して秩序パラメタの対称性と接合の向き次第では  $\pi$  が基底状態となる場合があり， $\pi$  接合と呼ばれている．

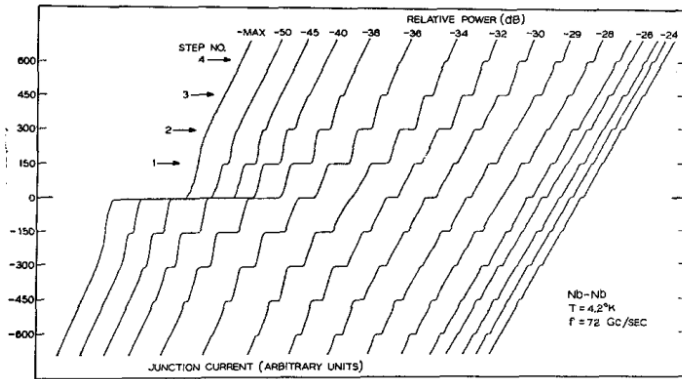


図 3: Nb-Nb の Josephson 接合に現れたシャピロステップを生じた電流電圧特性．横軸は電流，縦軸は電圧で，マイクロ波の強度を変化させながら測定している．データは見やすいように電流方向にマイクロ波強度ごとにシフトしている．

## 3.2 BCS 理論

フェルミ粒子系はパウリ原理によって 1 つの状態に凝縮することはできない．しかし，超伝導現象が何らかの意味で「凝縮」であることは，様々な実験により明らかであった．この基盤の上に GL 理論が建設された．さて，1 粒子状態への凝縮が不可能であれば，2 粒子の状態  $\varphi(r_0)\varphi(r_0 + r)$  を考え，ここへの凝縮は，粒子の入れ替えに関する対称性からは可能であろう．Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) 理論は，実際にこれが起こり得ること，この状態を考えることで様々な実験が定量的に説明できることを示した．少し遅れて，ほぼ等価だが数学的にはより簡明な Bogoliubov 理論が提出された．

ここではそのさわりを紹介する．理想気体 Fermi 球はもちろんそのままでは 2 粒子状態を形成しない．これは電子間クーロン相互作用を考えても同様であることは，Landau のフェルミ液体論によって示されている．従って，2 粒子 (対) 状態を生じさせるためには何らかの電子場以外の自由度が必要である．この「さわり」として示すべきは，(1) 対状態の形成可能性があること，(2) 対状態へ凝縮した多体状態が実現できること，である．

### 3.2.1 クーパー対

本来クーロン力で反発し合うはずの電子の間に引力が働き，更には対を形成してしまう，というのがクーパー (Cooper) 対である．まず，何とか「対を作らせよう」と考え，それに立ち塞がる障害を検討していくことにしよう．

1. クーロン反発をどうするか
2. 引力の元は何なのか
3. ペアにしてしまえるのか

1. は当然，面倒な問題である．まず考えられることは，電子同士がある程度空間的に離れていれば，その間に入ってくる他の電子の数は金属では膨大になるから，これによってクーロン相互作用は遮蔽されてしまうであろう，ということである．実際トーマス・フェルミ遮蔽長は金属中では 40-50pm と格子定数よりもずっと小さく，格子変形を要因とする力が働くスケールでは第一近似としてはクーロン相互作用は働かない．現実にはプラズモン励起などもう少し難しい問題があるが，ここでは遮蔽されるとして考えないことにしよう．

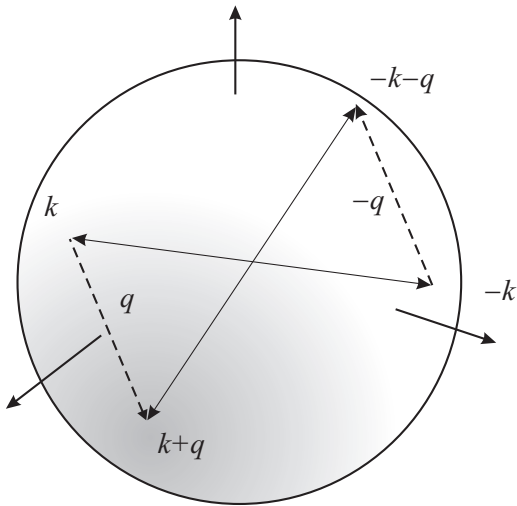


図 4: 「堅い」フェルミ球に  $k, -k$  にスピン  $\uparrow\downarrow$  の電子ペアを付け加える問題の模式図.

2. の引力の源は、現在通常超伝導体 (conventional superconductors) と呼ばれる物質群においては格子振動 (フォノン) の場がそれを担うことができる。これはすぐ後で見えることにしよう。

3. も大変な問題である。金属のフェルミエネルギーは数 eV と極めて大きく、電子は 1000km/s を超える猛烈なスピードで運動しており、これらを束縛するのは一見非常に難しく思える。そこでまず、3. について見ることにし、次のような問題を考えよう。完全に満たされたフェルミ球があるとし、これに表面ぎりぎりの所に新たに 2 個の電子を付け加えるとする。ペアの重心は動かないものとして  $k_1 = -k_2 \equiv k$  とする。ペアの間には、フォノンに起因する引力  $V$  が働いているとする。これは、フェルミ球がある場合の 2 体問題であるから、相対座標  $r \equiv r_1 - r_2$  で考えて良い。また、スピンは最も単純に  $1/2$  ( $\alpha$ )、 $-1/2$  ( $\beta$ ) と考え、スピン軌道はなく、スピン部分は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

と、反対称化されているとする。軌道部分  $\varphi(\mathbf{r})$  をフーリエ展開して

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (53)$$

とする。全体を反対称化するため軌道部分是对称でなければならないから、

$$g(\mathbf{k}) = g(-\mathbf{k})$$

である。 $k$  表示の波動関数  $g(\mathbf{k})$ 、問題設定から  $k < k_F$  では振幅を持たない。相互作用  $V$  の影響で 2 電子のエネルギーは変動し、 $g(\mathbf{k})$  もこれに相当する空間で振幅を持つ。フォノンのエネルギーはデバイ振動数を  $\omega_D$  とし  $\hbar\omega_D$  が上限であるから、 $g(\mathbf{k})$  が振幅を持つのは  $E_F$  と  $E_F + \hbar\omega_D$  の間の薄皮のような部分と言うことになる。

$$g(\mathbf{k}) = 0 \quad k < k_F, \quad \sqrt{2m(E_F + \hbar\omega_D)}/\hbar$$

対の実空間 Schrödinger 方程式を

$$\left( -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + V(r) \right) \varphi = (2E_F + \epsilon) \varphi$$

と書くと， $V = 0$  の時は固有値は  $2E_F$  であるから  $\epsilon$  が相互作用によるエネルギーシフトと言うことになる． $k$  空間で書くと

$$2\epsilon_k g(\mathbf{k}) + \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}') V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = (2E_F + \epsilon) g(\mathbf{k}) \quad (54)$$

となる． $\epsilon_k \equiv \hbar^2 k^2 / 2m$  で  $V(\mathbf{k})$  は  $V(r)$  のフーリエ変換である．

$V$  の最も簡単な形として， $\mathbf{k} = \mathbf{q} + \mathbf{k}'$  として

$$V(\mathbf{q}) = \begin{cases} -V_0 & E_F \leq \hbar^2 k^2 / 2m \leq E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (55)$$

を考えると，(54) は

$$(-2\epsilon_k + \epsilon + 2E_F) g(\mathbf{k}) = -V_0 \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} g(\mathbf{k}') \quad (56)$$

である．

$$g(\mathbf{k}) = \frac{V_0}{2\epsilon_k - \epsilon - 2E_F} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}')$$

として，両辺を  $k$  でフェルミ面球殻内で積分すると，

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{V_0}{2\epsilon_k - \epsilon - 2E_F} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} g(\mathbf{k}')$$

である． $g(\mathbf{k})$  の積分は両辺で割り切れてしまうので， $E \equiv \epsilon_k - E_F$  とおいて，

$$1 = \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2E(k) - \epsilon} = V_0 \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{N(E)}{2E - \epsilon} dE \quad (57)$$

が得られる．考えている球殻内で  $N(E)$  は一定 ( $N(0)$ ) と近似すると，

$$\frac{N(0)V_0}{2} \ln \left( \frac{\epsilon - 2\hbar\omega_D}{\epsilon} \right) = 1 \quad (58)$$

となり， $|\epsilon| \ll \hbar\omega_D$  とすると，

$$\epsilon \approx -2\hbar\omega_D \exp \left( -\frac{2}{N(0)V_0} \right) \quad (59)$$

で，必ず負の解を持っていることがわかる．すなわち，エネルギーが高くてつかまらないどころか，どんなに弱い結合でも引力である限りは束縛状態を作ってしまうことがわかった．

どうしてこのようなことになるのだろうか？ 計算を見てわかる通り， $k$  空間の真ん中にフェルミ球が居座っていることが束縛状態の原因である．ロケットが地球の引力圏を振り切るにはある程度以上の速度が必要なように，引力圏を振り切る際には，振り切ることで増加するポテンシャルエネルギーに見合う運動エネルギーを支払う必要がある．ところが，運動エネルギーの低い状態は他の電子ですっかり埋められているので，電子は運動エネルギーを失うことができない．結局弱い引力ながら対になった電子は，引力によって少しずつ向きを変えながら互いの周りを回るようになる．

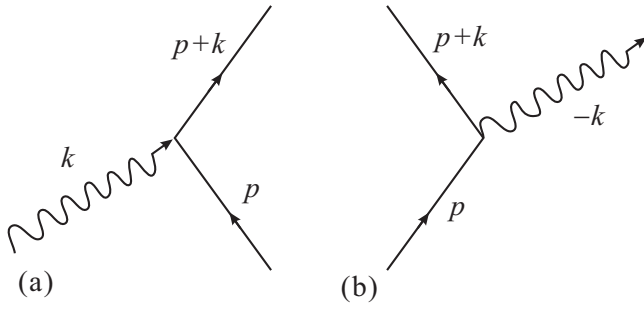


図 5: (a) 1 フォノン を吸収して電子が  $q$  から  $q+k$  へ散乱される過程 . (b) 1 フォノン を放出して電子が  $q$  から  $q+k$  へ散乱される過程 .

では、どんな風に回るのだろうか？今考えているのは、フェルミ球を除けば本質的に 2 体問題で、水素原子などと同類の問題である。従って、軌道角運動量によって  $s, p, d$ 、といった対の作り方があって考えられる。これらは実験例で見ることしよう。ただ、上で調べたモデルは、「カチカチのフェルミ球」に電子対を付け加えたものであり、もちろん、物理的な現実との乖離は大きい。「クーパー対形成に対してフェルミ球が不安定である」ということを数学的に示したものと捉えるべきである。

### 3.2.2 フォノン引力

より現実的な BCS モデルに進む前に、フォノン場によって引力が生じることを確認しておこう。電子フォノン相互作用がない時、基底状態は、電子系はフェルミ球、フォノン系はフォノンがすべて消滅しているフォノン真空と考えられる。すると、この基底状態に対する電子フォノン相互作用による摂動は、1 次摂動項は存在せず（1 次摂動ではゼロフォノン状態に戻れない）、主要項が 2 次摂動になって必ず基底状態のエネルギーを下げるため、引力が発生する。

以上が簡単なスケッチであるが、一応計算も示しておこう。ハミルトニアンは

$$H = H_e + H_v + H_{ev} \quad (60)$$

$$H_e = \sum_{k\sigma} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} \quad (61)$$

$$H_v = \sum_q \hbar\omega \left( b_q^\dagger b_q + \frac{1}{2} \right) \quad (62)$$

$$H_{ev} = -\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{pk\sigma} \alpha_k a_{p+k\sigma}^\dagger a_{p\sigma} (b_k + b_{-k}^\dagger) \quad (63)$$

と書くことができる。  $H_{ev}$  が相互作用である。図 5 に示したように、第 1 項が (a) のフォノン吸収過程、第 2 項が (b) のフォノン放出過程を表している。

無摂動の  $H_0 \equiv H_e + H_v$  の固有状態のうち、フォノンがないフォノン真空と波数  $k$  のフォノンが 1 個だけ存在する状態を考えることにし、電子状態の index  $i$ 、最低エネルギー状態のフォノン数  $n$  と波数  $k$  で指定される状態を  $|i, n, k\rangle$ 、固有エネルギーを  $E_i^{(nk)}$  と書こう。  $H_{ev}$  は基底状態  $\{|i, 0, -\rangle\}$  に対する摂動であり、これを作用させることで、  $n = 1$  の状態の重ね合わせになるので、明らかに

$$\langle i, 0, - | H_{ev} | j, 0, - \rangle = 0$$

であり、従って、摂動の主要項は 2 次摂動になる。



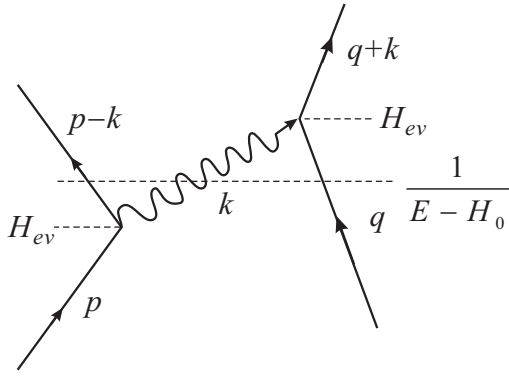


図 6: 2次摂動を与える過程．最初の散乱で波数  $k$  のフォノンが放出され，これを第 2 の電子が吸収して散乱される．2つの散乱過程を表すのが  $H_{ev}$  であり，散乱間の仮想励起状態の時間発展を示すのがプロパゲーター  $(E - H_0)^{-1}$  である．

$$(H_0 + H_{ev})\Psi = E\Psi$$

として， $\Psi$  を  $n = 0, 1$  の状態で展開する．

$$\Psi = \sum_i c_i |i, 0, -\rangle + \sum_{j,k} d_{j,bsk} |j, 1, \mathbf{k}\rangle \quad (64)$$

これを上の式に代入し， $\langle i, 0, -|$ ， $\langle j, 1, k|$  との積を取ることで，次の連立方程式が得られる．

$$\begin{cases} (E - E_i^{(0)})c_i = \sum_{jk} \langle i, 0, -|H_{ev}|j, 1, k\rangle d_j \\ (E - E_j^{(1k)})d_j = \sum_i \langle j, 1, k|H_{ev}|i, 0, -\rangle c_i \end{cases} \quad (65)$$

$d_j$  を消去すると，

$$(E - E_i^{(0)})c_i = \sum_{jk} \langle i, 0, -|H_{\text{eff}}|j, 0, -\rangle c_j \quad (66)$$

ただし，

$$H_{\text{eff}} = H_{ev} \frac{1}{E - H_0} H_{ev} \quad (67)$$

である．上の式は，実際に (65) を代数的に解いてみることで確認できるが，図 6 のようなプロセスを表している．すなわち，右側の  $H_{ev}$  は電子がフォノンを放出して散乱され， $(E - H_0)^{-1}$  によってフォノン 1 個の状態が伝播し (このため摂動論ではプロパゲーターと称する．Green 関数を使った摂動論についての詳細は，[5] などを参照．)，左の  $H_{ev}$  でフォノンを吸収して 2 番目の電子が散乱される．

確認のため，摂動項を計算しておく． $H_{ev}|j, 0, -\rangle$  で生き残るのは， $a_{p-k}^\dagger a_p b_k^\dagger$  (スピン指数は省略) であるから， $(E - H_0)^{-1} H_{ev}|j, 0, -\rangle$  は  $(E - \epsilon_{p+k} + \epsilon_p - \hbar\omega_k)^{-1} |l, 1, k\rangle$  を生じる． $\langle i, 0, -|$  で期待値を取ることから，左の  $H_{ev}$  で生き残るのは  $a_{q+k}^\dagger a_q b_k$  の項である．結局， $b_k$  の項は， $(E - H_0)^{-1}$  による係数項を生じて 1 となり，残った演算子は  $a_k$  の反交換関係を使って

$$a_{q+k}^\dagger a_q a_{p-k}^\dagger a_p = a_p^\dagger a_p \delta_{q,p-k} + a_{q+k}^\dagger a_{p-k}^\dagger a_p a_q$$

と書き換えられる．この内，最初の項は，電子系全体のエネルギーをシフトさせるだけであり，無視すると，第 2 項は，図 6 の過程を表しているのは明らかである．結局  $H_{\text{eff}}$  は次のように書

き換えられる．

$$H_{\text{eff}} = -\frac{1}{2V} \sum_{k,q,p} \alpha_k^2 \left( \frac{1}{\hbar\omega_k - \epsilon_{p-k} + \epsilon_p} + \frac{1}{\hbar\omega_k + \epsilon_{q+k} - \epsilon_q} \right) a_{q+k}^\dagger a_{p-k}^\dagger a_p a_q. \quad (68)$$

ここで重要な仮定を置く．フォノン放出過程において電子系のエネルギー変化  $\epsilon_{p-k} - \epsilon_p$  に比べてフォノンのエネルギー  $\hbar\omega_k$  は十分大きいとする．これは，前節で考えた「堅いフェルミ球」のモデルではもちろん正しく，電子がフェルミ球表面近くの薄い球殻内で散乱される過程を考えている．この場合は，(68) の係数の分母中の  $\epsilon_q$  等は無視できて

$$H_{\text{eff}} = -\frac{1}{2V} \sum_{q,k,p} \left( \frac{2\alpha_k^2}{\hbar\omega_k} \right) a_{q+k}^\dagger a_{p-k}^\dagger a_p a_q \quad (69)$$

となり，電子間にエネルギーを下げる相互作用を生じる．相互作用強度は実空間では電子間距離が近い方が強く，従って引力を表している．最初に述べたことの繰り返しになるが，引力の元となっているのは，2次摂動による仮想過程によりエネルギーの高い状態が混入してくることである．このような摂動は，常に状態間反発を通して基底状態のエネルギーを下げ，このため，相互作用は引力となる<sup>2</sup>．

## 参考文献

- [1] 超伝導・超流動の良い入門書は多数あるが，我田引水で，勝本信吾，河野公俊「超伝導・超流動」(岩波書店，2006)を挙げておく．
- [2] Petter Minnhagen, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001 (1987).
- [3] B. D. Josephson, Phys. Letters **1**, 251 (1962).
- [4] Aslamasov, JETP Lett. **9**, 87 (1969).
- [5] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzialoshinskii, “Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover, 1975).

---

<sup>2</sup>では，光子を媒介とするクーロン力はなぜ引力と斥力の両方が出るのか．事情ははるかに複雑であり，興味深く，また驚くべきものである．場の量子論を学ぶ皆さんの興味ある課題である．