

講義ノート「低温物理学」 No.7

2009.5.21

物性研究所 勝本信吾

4.3.3 単クーパー対トランジスタ

以上見てきたように、単電子(クーパー対)帯電効果が重要になる金属のトンネル接合系—一種の電子回路においては、接合に溜まった電荷が重要な力学的変数になる。単一超伝導接合においては、電荷と正準共役な変数として、電極の超伝導マクロ波動関数間の位相差が存在する。ここで展開しようとしていることが、(トンネル接合)「電子回路系の量子力学」であることを再度強調しておこう。余剰電荷数 n と位相差 θ はいずれもマクロな変数であり、その量子ゆらぎはマクロ変数の量子ゆらぎの問題に直結している。ここでは、最も簡単なマクロ量子力学の処方箋として、「系の力学変数とそれに正準共役な変数とを見出し、その間に量子力学的交換関係を要請する」方法で量子化を行っている(直接量子化。このあたりの事については[1]などを参照。)

単一孤立接合の問題は、正常金属の場合にも強調したように、現実に実験系にした場合電源の仕事の問題があり、余り現実的ではない。そこで、再び図**のような2接合+ゲートの単電子トランジスタ回路を考えよう。ソース、ドレインには定電圧電源が接続されているとする。各接合における位相差を φ_1, φ_2 、簡単のため Josephson エネルギーは2つの接合で同じで E_0 とすると、

$$E(n, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{(2ne - q_g)^2}{2C_\Sigma} - E_0(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \quad (118)$$

である。これは、変換

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi \\ (\varphi_1 - \varphi_2)/2 &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

によって

$$E(n, \theta, \varphi) = \frac{(2en - q_g)^2}{2C_\Sigma} - 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \theta \quad (120)$$

と書き換えられる。これを量子化するわけだが、 φ はトランジスタ全体での位相変化であり、今の場合、電極という大きな粒子溜めによって決まっており、量子ゆらぎは考えなくて良い¹。すなわち、接合にかかる電圧や外部磁場(現在これは考えていないが)などのような単なるパラメ

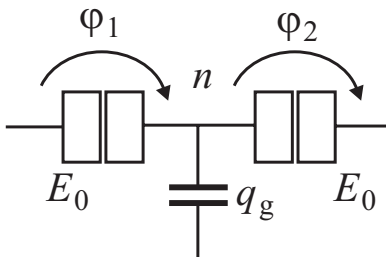


図 1: 単クーパー対トランジスタの模式図

¹この部分の帯電エネルギーを考えなくて良いのと等価。粒子溜めであるので粒子数の揺らぎが非常に大きいと考えても良い。

タとして良い．そこで， n, θ を演算子化して

$$[\hat{n}, \hat{\theta}] = -i \quad (121)$$

とする．Josephson の項は単一接合の場合と形式的に同じになり，ハミルトニアンを n 表示で

$$H = E_c \left(2n - \frac{q_g}{e} \right)^2 - \frac{E_J(\varphi)}{2} \sum_n (|n+1\rangle\langle n| + |n-1\rangle\langle n|) \quad (122)$$

$$E_J(\varphi) \equiv 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2} \quad (123)$$

と書くことができる．

$E_0 \ll E_c$ の場合を考える（この場合は，上の n 表示が便利である）．(122) のように簡単であっても固有値問題を簡単に解くことはできないが，クーロン振動の電流ピーク付近， $|n\rangle$ と $|n-1\rangle$ が基底状態として縮退している近傍について考え，これ以外の状態を無視してしまうと（周期ポテンシャルのプロット解の場合の 2 バンド近似）， H は 2×2 行列で簡単に解け，

$$N \equiv 2n - \frac{q_g}{2e}$$

と置いて，エネルギー固有値は

$$E_n = E_c \left\{ \frac{N^2 + (N+2)^2}{2} \pm 2 \left[(N+1)^2 + \left(\frac{E_J(\varphi)}{4E_c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (124)$$

$$= E_c \left(1 \pm \frac{E_J(\varphi)}{2E_c} \right) \quad (N = -1) \quad (125)$$

となる．すなわち，図 2 のように放物線の交差点で準位間反発が生じ， E_J のギャップが開く．

今，2つの超伝導体を考え，無限の過去に位相差がゼロであったとして断熱的に位相差を φ まで変化させる．この時，電源系が接合に対して行った仕事が接合系のエネルギーであるから，Josephson の加速方程式

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$$

より

$$E = \int (JV) dt = \int J \frac{\hbar}{2e} d\varphi$$

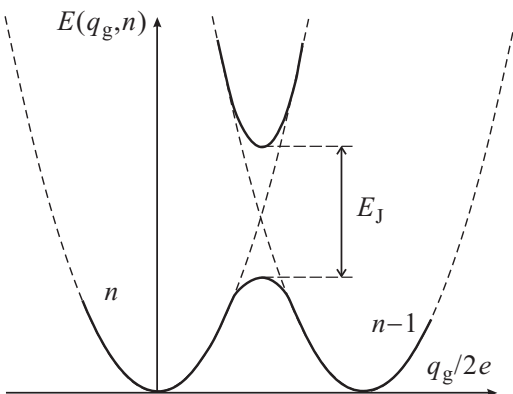


図 2: 単クーパー対トランジスタの「バンドダイアグラム」．形式的には 1 次元周期ポテンシャル中の粒子の波数に対するエネルギーと同じである．もちろん，この図の場合，横軸はゲートにたまった電荷（粒子数）であり，ここでは全くのパラメーターとして扱っている．

すなわち

$$J = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad (126)$$

である．直流 Josephson 効果の電流の表式 (47) も，Josephson エネルギー (105) と (126) から容易に得られる．

(125)，(126) より

$$J = \frac{2e}{\hbar} \frac{E_0^2}{8E_c} \frac{\sin \varphi}{[(N+1)^2 + (E_J(\varphi)/4E_c^2)]^{1/2}} \quad (127)$$

が得られる．(127) は縮退点 ($N = -1$ など) で最大値を取り，

$$J_{\max} = \frac{2e}{\hbar} \frac{E_0^2}{2E_J(\varphi)} \sin \varphi = \frac{2e}{\hbar} \frac{E_0}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (128)$$

一方，Coulomb blockade の最も強い縮退点の中間 ($N = 0$ など) では， $E_0 \ll E_c$ より

$$J_{\min} = \frac{2e}{\hbar} \frac{E_0^2}{8E_c} \sin \varphi \quad (129)$$

である．ただし，これについては，縮退点から遠いため， 2×2 行列近似は明らかに成立せず，隣の縮退点から外挿した電流も同じ寄与をするため，正しい最小電流値は上の式の 2 倍になる．(128) からわかるように，縮退点での臨界電流は帯電エネルギーの大小によらない．これは，縮退点では n のゆらぎが 1 のオーダーになるため， θ のゆらぎは $1/4$ 程度と帯電エネルギーによらずに一定で， $\pi/2$ より小さくなるためである．一方，(129) より J_{\min} は， $E_0 \ll E_c$ であれば強く押さえられる．これはもちろん，帯電エネルギーによって n の揺らぎが押さえられた結果である．

以上から，この系は，正準共役な 2 つのマクロ変数の揺らぎに応じて臨界電流が変化することがわかった．実際の実験には様々な要請により，より複雑な系が使われるが，「マクロ変数の量子力学」の最も初歩的な実験的舞台である．

4.4 量子ドット

4.4.1 エネルギー準位スペクトロスコピー

これまで扱ってきた金属系での仮定は，

- フェルミ縮退
- フェルミ準位付近にエネルギー準位が連続的にある
- $\mu = 0$

であった．系が半導体のようにキャリア数が少なく，フェルミ波長が系の空間的サイズと同程度に長い系では，特に連続エネルギー準位の存在仮定が成立しなくなる．すなわち，量子閉じ込めによって軌道エネルギー準位間隔が広がり，温度によるゆらぎやトンネル遷移による寿命幅よりも大きくなると，そのエネルギー準位の離散性が物理現象，特に電気伝導に明瞭に現れ

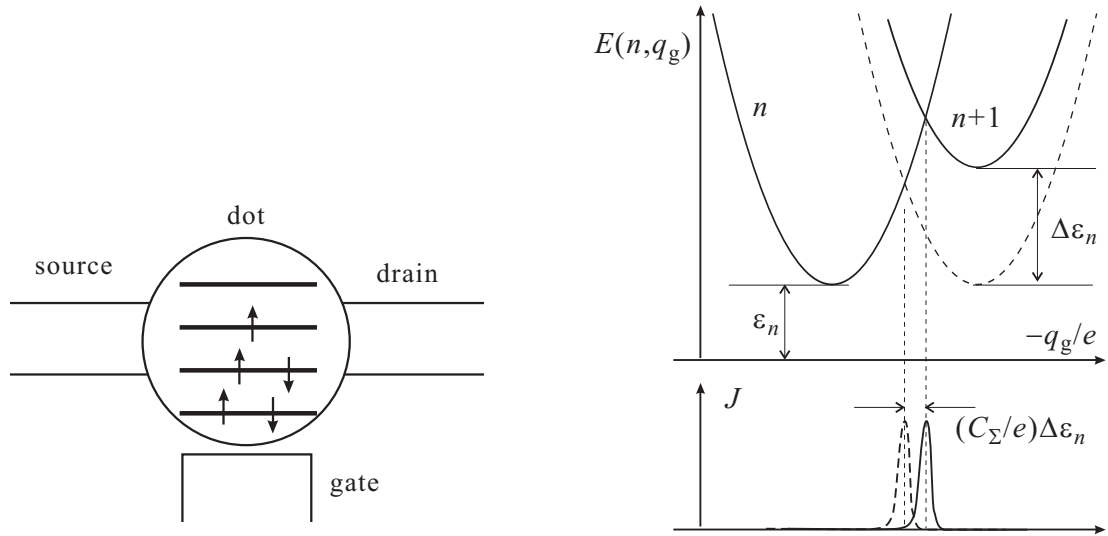


図 3: 左: Coulomb island 自身を量子力学的に取り扱う必要が生じた場合のモデルを模式的に示した. 量子閉じ込めによるエネルギー準位の離散性を問題にする. 更に下のレベルまでを問題にする場合には原子レベルまで下がった議論が必要になる. 右: エネルギー準位離散性がクーロン振動にどのような影響を与えるかを模式的に示した図.

る. このような軌道エネルギーの離散性が問題となるような微小構造を量子ドットあるいは人工原子などと呼ぶ.

以下, 量子閉じ込めによる単電子エネルギー準位の離散性の影響を考えよう. 量子準位 ϵ_n 化学ポテンシャル $\mu(=0)$ から測定するものとする. また, これまでは Coulomb island の電子数は電気的中性状態を 0 として数えていたがここからは, 量子ドット中から伝導電子(あるいは正孔)がいなくなった状態を 0 として勘定することにしよう.

電子間相互作用は最も簡単な単一容量静電キャパシタ近似で扱い(要するにこれまでと同じ扱い), 電子は軌道エネルギーの低い準位から順に詰まっていくとする. n 個目の 1 電子準位 (Kramers 縮退など縮退準位はそれぞれすべて縮重分の数の準位として数える) エネルギーを ϵ_n とする. 量子ドットに 2 つのトンネル可能な電極が付き, 1 つのトンネル不可能なキャパシタ (ゲート電極) がついた単電子トランジスタ構造を考えよう. これまでと同様に, 電源の仕事考慮し (Gibbs 自由エネルギー), n に関係のない項を無視すると, 式 (103) より, ソース・ドレイン電圧 $V=0$ の場合,

$$E(n) = \frac{(ne - V_g C_g)^2}{2C_\Sigma} + \epsilon_n. \quad (130)$$

我々がまず実験で知ることができるのは, (130) のパラボラの交点においてソース・ドレイン電流が鋭いピークを持つクーロン振動ピーク位置である. 更に, 現実問題として 1 本のピークの絶対的な位置は問題にすることはできない. 多数ピークの相対的な位置のみを頼りに解析を進めることになる. まず, n と $n+1$ のパラボラの交差点のゲート電荷 q_n を求めよう.

$$\begin{aligned} \Delta E(n, n+1) = E(n+1) - E(n) &= \frac{e}{C_\Sigma} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) e - C_g V_g \right\} + \Delta \epsilon_n \quad \Delta \epsilon_n \equiv \epsilon_{n+1} - \epsilon_n \\ q_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) e + \frac{C_\Sigma}{e} \Delta \epsilon_n. \end{aligned} \quad (131)$$

式 (102) と比べると，ピーク位置が $\Delta\epsilon_n$ だけシフトすることがわかる．従って，実験のピーク位置を，一定値+一電子エネルギー準位の増加分としてフィットすることで，量子ドット中のエネルギー準位分光を行うことができる．これを addition energy spectroscopy と呼ぶ．特に，縮退があるとき $\Delta\epsilon_n = 0$ であり，通常は Kramers 縮重があるため，これを基準にすることで信頼性の高い分光ができる．

例) 2次元等方的調和振動子ポテンシャルこのようなポテンシャル中の Schrödinger 方程式の解は2つの1次元調和振動子の解の線形和で書くことができる．

$$\epsilon(N) = \hbar\omega(N+1) \quad N = n_x + n_y \quad (132)$$

N 番目の準位の縮重度 N ．すると，閉殻構造をとる電子数は，殻の個数を M として，スピンの2もつけると

$$2 \sum_{N=1}^M N = M(M+1) \quad (133)$$

(実験例) 樽茶量子ドット → ppt ファイル

例2) 2次元調和振動子ポテンシャル+一様磁場

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2) \quad (134)$$

ゼーマン項は無視する．対称ゲージ $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ を取ると，

$$\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{i\hbar eB}{2m} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

であるから，

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2}L_z \quad (135)$$

ただし，

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{m} \quad \text{cyclotron frequency} \quad (136)$$

$$\Omega^2 \equiv \omega^2 + \frac{\omega_c^2}{4} \quad L_z \equiv xp_y - yp_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (137)$$

ここで， L_z は H と交換するので運動の恒量であり，固有値 $l_m\hbar$ を持つ．したがって，エネルギー固有値は

$$E_{N,l_m} = (N+1)\hbar\Omega + \frac{\hbar\omega_c}{2}l_m \quad l_m = -N, -N+2, \dots, N \quad (138)$$

となる．この状態を Fock-Darwin 状態と呼ぶ．なお，上で述べた，2次元調和振動子の解を2つの調和振動子の線形和で書いた状態は一般に \hat{H} と \hat{L}_z の同時固有状態ではない．回転対称な解は，動径方向量子数 n_r と l_m とで指数付けされ， $N = 2n_r + |l_m|$ である．上の式で， l_m が2飛びで変化しているのはこのためである．

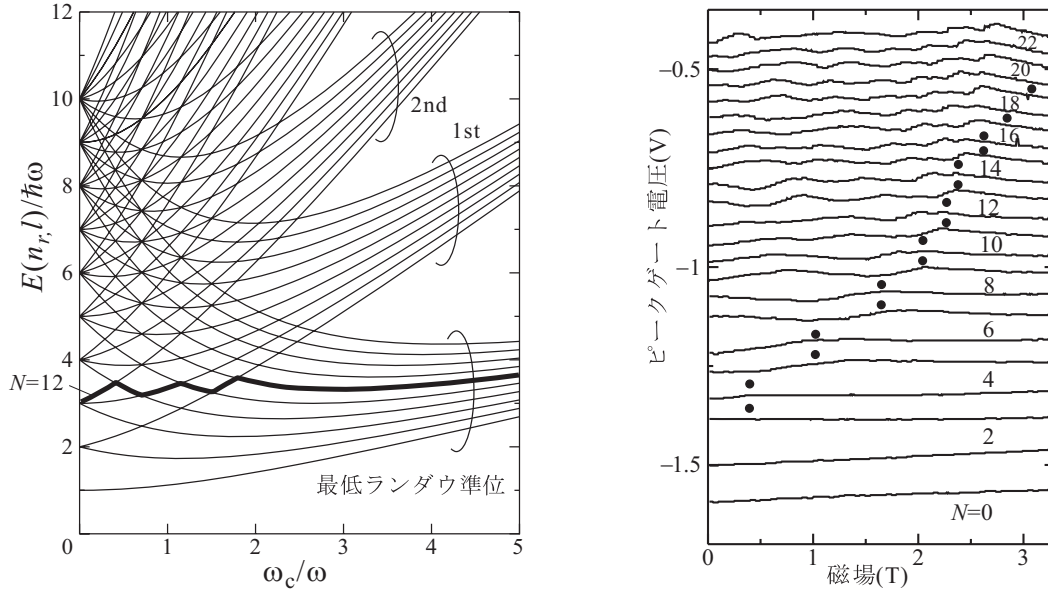


図 4: 左 : FockDarwin 状態のエネルギーを磁場 ω_c/ω_0 の関数として描いたもの . やや太い線は , ドットの電子数 $N = 12$ の場合に最上位の電子が取るエネルギー準位をトレースしたもの . 右 : 円形の調和振動子ポテンシャルを閉じ込めポテンシャルとする量子ドットのクーロンピーク位置を , 加えた磁場に対してプロットしたもの . 黒丸は計算から予想される「ジグザグ振動」が終了する点を示している .

4.4.2 定相互作用モデル

「電子回路の量子力学」を考えたように , 量子ドット系も量子力学的に取り扱うことを考えよう (人工原子・不純物として取り扱う際にはそのような扱いが実際に必要となる) . 上で見た , 「1 個電子を足すごとに , 一定の静電エネルギーと軌道エネルギーが必要となる」モデルを , 次のように一定相互作用モデルに焼き直そう . n 個目の電子による自由エネルギーを

$$E_n = \sum_{j=1}^n \epsilon_j +_n C_2 U \quad (139)$$

と書く . すなわち , 新たに加えられる電子は , これまですでにドット中に存在する電子と一定の相互作用 U を行う , とする . すると , n 個目の電子を加える際の電気化学ポテンシャル μ_n は

$$\mu_n = \epsilon_n + (n - 1)U \quad (140)$$

となり , ゲート電圧によってドット全体の静電ポテンシャルが線型に変化すると考えるとこのモデルは (131) の結果を再現していると言うことができる .

そこで , これを量子化のベースとして考え , これを次のように量子力学的ハミルトニアンに焼き直す . ただし , 隣り合うパラボラだけ考えた金属接合の時と同様 , 電子数が 1 個だけ変化

する過程について考えることにする．すなわち，ドット内の1電子準位は一個だけとする．

$$H = H_{\text{leads}} + H_{\text{dot}} + H_{\text{T}} \quad (141)$$

$$H_{\text{dot}} = \sum_{\sigma} \epsilon_0 d_{\sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + U d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow}, \quad (142)$$

$$H_{\text{leads}} = \sum_{\alpha=L,R} \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{\alpha,k\sigma}^{\dagger} c_{\alpha,k\sigma}, \quad (143)$$

$$H_{\text{T}} = \sum_{\alpha=L,R} \sum_{k\sigma} (\gamma_{\alpha} c_{\alpha,k\sigma}^{\dagger} d_{\sigma} + \text{h.c.}). \quad (144)$$

これは，いわゆる不純物アンダーソンモデル (impurity Anderson model) そのものである．

参考文献

- [1] A.J. Leggett, “Quantum mechanics at the macroscopic level,” in *Chance and Matter*, ed. J. Souletie, J. Vannimenus, and R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1987), pp. 395-506.