

講義ノート「低温物理学」 No.9

2009.6.4

物性研究所 勝本信吾

5.2.2 量子細線ネットワーク (多チャンネル Landauer 公式)

2 端子の Landauer 公式から学んだことは, 1 次元伝導体 (量子細線) の伝導度は量子化している, ということである. ここで, すでに使ってしまった用語であるが, 伝導チャンネルという考え方を導入しておこう. 全くの 1 次元バンドの伝導度は, 散乱がない場合, スピン自由度も入れて $2G_q$ である. そこで, この「完全な 1 次元バンド」の重ね合わせで系を記述してしまうことを考える. この「完全な 1 次元バンド」を伝導チャンネルと呼ぶ. 定義によっては散乱をチャンネル中に含めて, 「チャンネルの透過率」を考える場合もあるが, ここでは, 散乱のない 1 次元バンドを考えることにする. 例えば, QPC では, 伝導度が $2G_q$ の整数倍に量子化されていたが, これは n 倍の伝導度ステップ上では n 個の伝導チャンネルが重なって存在していると解釈する.

すると, 系が 1 体の Schrödinger 方程式で表されるとすると, 線形性によってそれぞれのチャンネルの透過率を加えたものが全体の透過率になるのは自明である. したがって

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{(i,j)} T_{ij} \quad (175)$$

となる. ただし, T_{ij} はチャンネル j から i へ抜けるプロセスの透過確率を示す.

(175) のようにまとめると, 続いて以下のようなことが問題となるであろう.

1. $\sum_{(i,j)} T_{ij}$ をどう計算するか
2. 4 端子素子にしたらどうなるか. あるいはもっと端子を増やし本格的な「系+reservoirs」モデルになったらどうなるか.

1 番目はもちろん非常に大きな問題であり, Green 関数を用いる手法を中心に極めて多くの理論的な方法が開発されている. ここでは詳しく立ち入る余裕はない. 2 番目については枠組みを考えておこう.

5.2.3 S 行列 (S-matrix) による取り扱い

図 2 のように, 2 つの伝導チャンネル 1, 2 がつながっている系 (長方形で示された部分), 電子回路流に言う「2 端子デバイス」を考える. それぞれのチャンネルには入射波と反射波が伝播

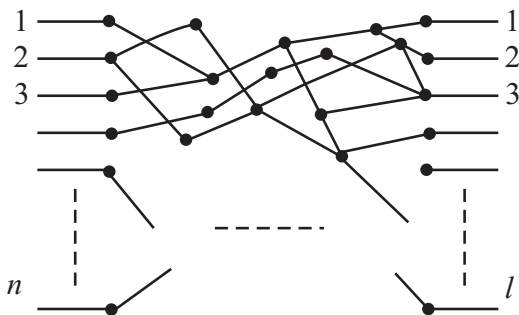


図 1: 乱れた伝導体の伝導チャンネルネットワーク (量子細線ネットワーク) モデル

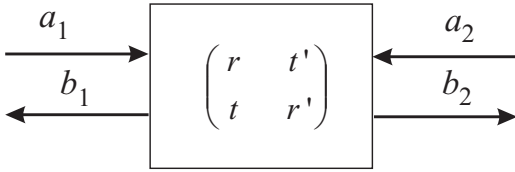


図 2: 量子細線の S 行列

している．チャンネル 1, 2 内の波動関数 ψ_1, ψ_2 はそれぞれ次のように平面波で書けるであろう．

$$\psi_1 = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx}, \quad \psi_2 = a_2 e^{-ikx} + b_2 e^{ikx}.$$

ここで，簡単のため k は 1, 2 で共通に取ったが，もちろんチャンネルの性質により一般には異なる．Schrödinger 方程式の線型性より，入射振幅 (a_1, a_2) と出射振幅 (b_1, b_2) との間には，線型の関係がなければならないから，

$$\begin{aligned} b_1 &= r a_1 + t' a_2 \\ b_2 &= t a_1 + r' a_2 \end{aligned} \tag{176}$$

である．ここで， (r, t) は左方から見た反射係数行列，透過係数行列， (r', t') は右方から見たものである．(176) を

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \tag{177}$$

と書いて， \mathbf{S} を S 行列と呼ぶ．確率密度の保存より， \mathbf{S} はユニタリーでなければならない．この S 行列に対して，

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} \tag{178}$$

と書いて， \mathbf{T} を転送行列あるいは T 行列と呼ぶ．定義からわかるように，これは方向性を重視した線型関係で，1 次元的に系をつないでいく際に便利である．

以上の 2 チャンネルの話が多チャンネルにするのは，形式的には容易であることがわかるであろう．すなわち，(176) であれば， \mathbf{a}, \mathbf{b} を多次元のベクトルとすればよい．ただし，S 行列や T 行列の中身は上ほど簡単でなくなる．特に T 行列は「反射係数行列」のようなもので表そうとすると，逆行列が入って大変面倒になる．それでも，1 次元連結を考える際は T 行列の方が数学的には楽である．

磁場などがなく，時間反転対称性がある場合には，入出力を入れ替えて ($\mathbf{a} \rightleftharpoons \mathbf{b}$ ，ただし，進行方向の逆転に伴い，複素共役を取る) 同じ S 行列で伝導体が表されるはずだから，ユニタリーの条件¹と合わせると，S 行列の条件として

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^* = {}^t \mathbf{S}^*, \quad \therefore \mathbf{S} = {}^t \mathbf{S} \tag{179}$$

である．

¹(179) は，行列 \mathbf{U} がユニタリーである条件の 1 つ，

$$\mathbf{U}^t \mathbf{U}^* = {}^t \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I} (\text{単位行列})$$

を用いている．

磁場 B が存在して時間反転対称性が破れている場合は，(179) は，

$$S(B) = {}^t S(-B) \quad (180)$$

に変更しなければならない．

これは，次のように考えることで導かれる．今，考えているのが，1体の Schrödinger 方程式の散乱問題だったことを思い出そう．Schrödinger 方程式

$$\left[\frac{(i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m} + V \right] \psi = E\psi \quad (181)$$

の複素共役をとり， $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ とすると，

$$\left[\frac{(i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m} + V \right] \psi^* = E\psi^* \quad \therefore \{\psi^*(-B)\} = \{\psi(B)\} \quad (182)$$

すなわち， $\psi(B)$ と $\psi^*(-B)$ は同じ解集合を形成している．ここで，考えている $\psi(B)$ は Schrödinger 方程式 (181) の散乱解だったことを思い出そう．

$$(\mathbf{a}(B), \mathbf{b}(B)) \in \{\psi(B)\} \quad (183)$$

$$\mathbf{b}(B) = S(B)\mathbf{a}(B) \quad (184)$$

式の前の括弧の中は (入射波，出射波) という書き方で散乱解を表している．(184) の両辺の複素共役をとって

$$\mathbf{b}^*(B) = S^*(B)\mathbf{a}^*(B) \quad (185)$$

一方，進行波に対して複素共役をとることは，波の進行方向を逆転することになる．つまり，

$$(\mathbf{b}^*(B), \mathbf{a}^*(B)) \in \{\psi^*(B)\} \quad (186)$$

$$\therefore (\mathbf{b}^*(-B), \mathbf{a}^*(-B)) \in \{\psi^*(-B)\} = \{\psi(B)\} \quad (187)$$

$$i.e. \quad \mathbf{a}^*(-B) = S(B)\mathbf{b}^*(-B) \quad (188)$$

(188) より

$$\mathbf{b}^*(B) = S^{-1}(-B)\mathbf{a}^*(B) \quad (189)$$

であるから，(185) と比較して

$$\therefore S^*(B) = S^{-1}(-B) = S^\dagger(-B) \quad (\because \text{unitarity})$$

$$\therefore S(B) = {}^t S(-B) \quad (190)$$

以上より相反性が証明された．

5.2.4 S 行列の直列接続

最も簡単な例として，量子抵抗器の直列結合を考えよう．2つの1次元伝導体の S 行列

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & t_1 \\ t_1 & r_1' \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} r_2 & t_2 \\ t_2 & r_2' \end{pmatrix}$$

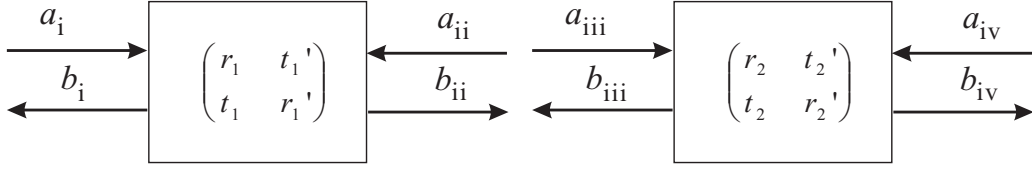


図 3: 2つの量子細線の結合とS行列

を考える。

導体1, 2のチャンネル数は同じだとして図3のように, 伝導体を直列に接続し, それぞれのチャンネルを1対1で直結したとする。電流の連続性より

$$b_{iii} = a_{ii}, \quad b_{ii} = a_{iii} \quad (191)$$

である。結合導体の入出力は $(a_i, a_{iv}), (b_i, b_{iv})$ であるから,

$$\begin{pmatrix} b_i \\ b_{iv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ a_{iv} \end{pmatrix} \quad (192)$$

と書けたとすると, 少し計算することで, この合成S行列の各部分行列は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + t'_1(I - r_2 r'_1)^{-1} r_2 t_1 & t_1(I - r_2 r'_1)^{-1} t'_2 \\ t_2(I - r'_1 r_2)^{-1} t_1 & r'_2 + t_2(I - r'_1 r_2)^{-1} r'_1 t'_2 \end{pmatrix} \quad (193)$$

この結果は物理的には何を示しているのか, r の例を調べてみよう。 $(I - r_2 r'_1)^{-1}$ を次のように展開する。

$$\begin{aligned} r &= r_1 + t'_1(I + r_2 r'_1 + (r_2 r'_1)^2 + \dots) r_2 t_1 \\ &= r_1 + t'_1 r_2 t_1 + t'_1 (r_2 r'_1) r_2 t_1 + t'_1 (r_2 r'_1)^2 r_2 t_1 + \dots \end{aligned} \quad (194)$$

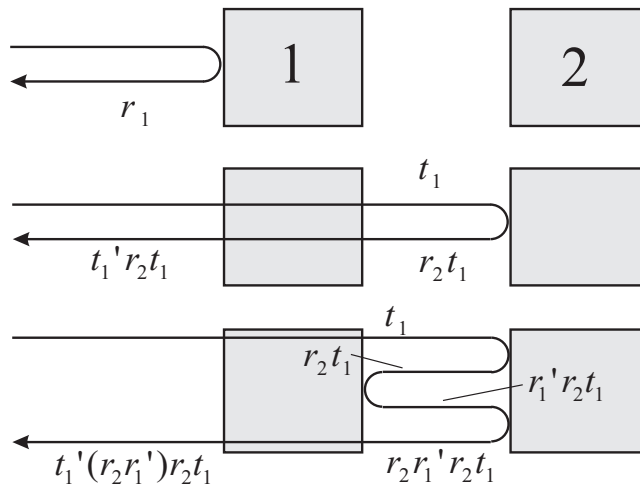


図 4: 2つのS行列を合成した行列の部分行列 r の各項 (最初の3項) に相当する物理的な過程

このように展開してみると，第 1 項は伝導体 1 での反射，第 2 項は 1 を透過して 2 で反射されて 1 を反対向きに透過して戻ってきたもの，第 3 項は更に反射を繰り返して戻ったもの，… と多重反射のファインマン経路をすべて足し上げているものであることがわかる．このように， S 行列の結合を考えることで重要な経路の寄与の積算を自然に行うことができる．

5.2.5 「端子」の重要性

2 端子 Landauer 公式では，散乱のない完全な量子細線でも伝導度は有限 ($2nG_q$) に止まる．何故か？

これは 2 端子デバイスであるため，必然的に「接触抵抗」を測定しているためである．もちろん，ネットワーク中の量子細線は常に 2 端子素子として考えてよいので公式の不備というわけではない．次の図を見て考えてみよう．

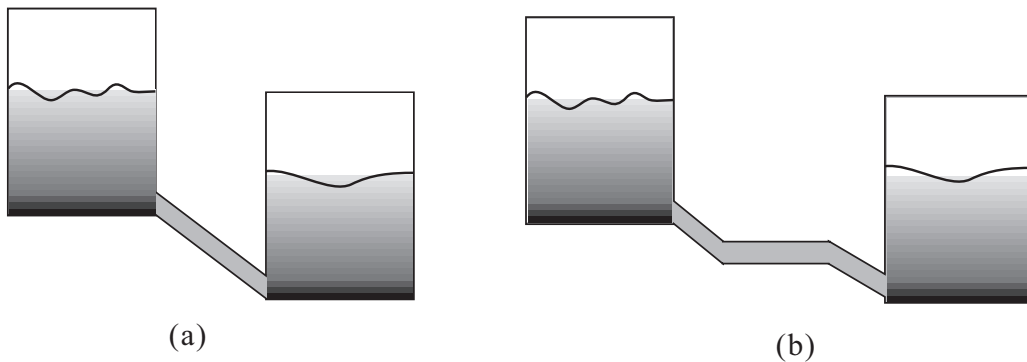


図 5: 量子細線と電源（粒子溜め）の水流モデル．(a) 直接接続．(b) ランダウアー公式の仮定により近い模型．

5.3 4 端子 Landauer 公式

もちろん，単一の系の伝導を調べる場合は 4 端子測定でどのような結果が得られるか知っておく必要がある．そこで，次に 4 端子の場合の公式を考える．

4 端子の場合は，図 6 のように，理想リードの部分の電位（化学ポテンシャル）を測定することになる．

問題は，非平衡にある理想導線の化学ポテンシャルがそのままでは定義できないことである．そこで，実際の測定に即して次のように考える．

理想導線に試料以外のところで，もう 1 箇所粒子溜めと接続する．この接続は非常に弱いものとする．この粒子溜めの化学ポテンシャルを調節して理想導線との間に電流が流れないようにする．この時粒子溜めの化学ポテンシャルを理想導線の擬似的化学ポテンシャルとする．

図 6 で，左側の導線と粒子溜め間の透過確率を T_{1A} とすると，粒子溜め 1 から粒子溜め A に流れ込む電流 J_1 は

$$J_1 = \frac{2e}{h} (T_{1A} + (1 - T)T_{1A}) (\mu_1 - \mu_a) = \frac{2e}{h} (2 - T)T_{1A} (\mu_1 - \mu_a) \quad (195)$$

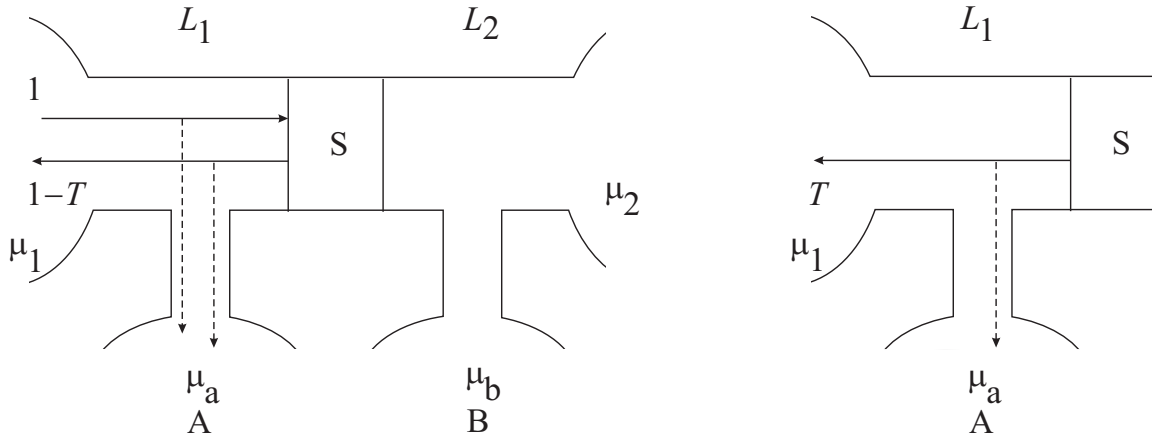


図 6: 4 端子の Landauer 公式を導くモデル .

一方右の電極から試料を透過して粒子溜め A に流れ込む電流 J_2 は

$$J_2 = \frac{2e}{h} T T_{1A} (\mu_2 - \mu_a) \quad (196)$$

$J_1 + J_2$ がゼロでなければならないから ,

$$\mu_a = \frac{1}{2} ((2 - T)\mu_1 + T\mu_2) \quad (197)$$

対称性から

$$\mu_b = \frac{1}{2} (T\mu_1 + (2 - T)\mu_2) \quad (198)$$

したがって ,

$$\mu_a - \mu_b = (1 - T)(\mu_1 - \mu_2) \quad (199)$$

$$\therefore G_{(4)} = \frac{G_{(2)}}{1 - T} = \frac{2e^2}{h} \frac{T}{1 - T} \quad (200)$$

となって , $T = 1$ であれば , 伝導度無限大という水流の場合の直感と同じ結果が得られた .

5.4 Landauer-Büttiker の公式

単一チャンネルの場合でもかなり面倒だったので , 多チャンネルの場合は非常な困難が予想されるが , 2 端子の公式は多チャンネルの場合でも , 結局は G_q と透過率の積で書いていたことに着目し , これを端子間の透過率という形で簡単化すれば , 比較的簡単な形にまとめることができる .

端子数には特に制限を設けず , 端子を p, q などで指数付けしよう (図 7) . 端子 p は化学ポテンシャル $\mu_p = eV_p$ を持つ粒子溜めに接続されているとする . 端子 p から試料に流れ込む電流 J_p は , p から試料へと向かうチャンネルの電流から , p 以外の各端子から試料を通して p へ流れ

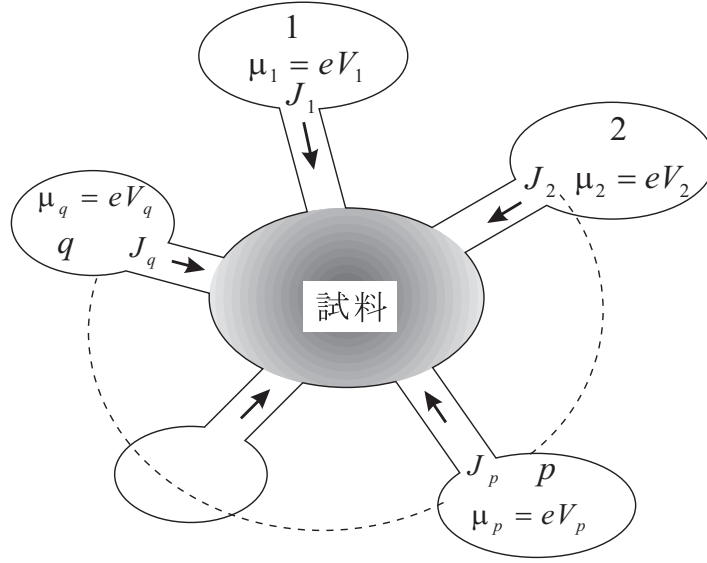


図 7: LB 公式を導くモデル .

込む電流を差し引いたものであるから ,

$$J_p = \frac{2e}{h} \sum_q [T_{q \leftarrow p} \mu_p - T_{p \leftarrow q} \mu_q] \quad (201)$$

$$V_q = \frac{\mu_q}{e}, \quad G_{pq} \equiv 2e^2 h T_{p \leftarrow q} \quad \text{とおくと}$$

$$= \sum_q [G_{qp} V_p - G_{pq} V_q] \quad (202)$$

である . 基本はこれだけであるが , 以下のように様々な制限条件がつく .
まず , 電流の保存から

$$\sum_q J_q = 0 \quad (203)$$

である . 次に , 全端子の電位が同じなら電流は零のはずであるから ,

$$\sum_q [G_{qp} - G_{pq}] = 0 \quad (204)$$

となる .

更に , 外部磁場 B に対して Onsager の相反定理

$$G_{qp}(B) = G_{pq}(-B) \quad (205)$$

が成立する . これはもちろん , S-matrix の時に成立した Onsager の相反定理からの帰結である .

4 つの端子を持つ試料を考える . 4 つの化学ポテンシャル (電位) の内 , 端子 4 の電位を参照電位として $V_4 = 0$ とおく . すると ,

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12} + G_{13} + G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{21} + G_{23} + G_{24} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{31} + G_{32} + G_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (206)$$

と書くことができる．

さて，カシミール (Casimir) 問題と呼ばれる，

$$J_1 = -J_3, \quad J_2 = -J_4 \quad (207)$$

という境界条件を考えよう．これは， $J_2 = 0$ とおけば，1-3 に電流を流して 2-4 で (電流を流さずに) 電圧を測定する通常の 4 端子測定問題になるので，これを含んでいる．この問題の解は， $V_{ij} \equiv V_i - V_j$ とおいて

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{24} \end{pmatrix} \quad (208)$$

という形に書くことができる．ただし，

$$\alpha_{11} = g_q[(1 - R_{11} - S^{-1}(T_{14} + T_{12})(T_{41} + T_{21}))] \quad (209)$$

$$\alpha_{12} = g_q S^{-1}(T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32}) \quad (210)$$

$$\alpha_{21} = g_q S^{-1}(T_{21}T_{43} - T_{23}T_{41}) \quad (211)$$

$$\alpha_{22} = g_q[(1 - R_{22} - S^{-1}(T_{21} - T_{23})(T_{32} + T_{12}))] \quad (212)$$

$$S = T_{12} + T_{14} + T_{32} + T_{34} = T_{21} + T_{41} + T_{23} + T_{43} \quad (213)$$

である．(208) は電圧で電流を表す形になっているが，もちろんこれは式の上でそう書いているだけで，物理的な操作としては何らかの電気回路等のフィードバックを使用して，(207) の条件が満たされるように， V_1, V_2, V_3 を調整することになる．

5.4.1 Aharonov-Bohm(AB) 効果

干渉効果

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ |\psi|^2 &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2| \cos \theta \end{aligned} \quad (214)$$

θ は，2 つの経路の行路差から来る位相差である．ここに磁場をかけるとどのような変化が起こるか？

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad \left(\mathbf{k} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}\right)$$

進行波が $\exp(ik \cdot \mathbf{x})$ という形式であることから，

$$\theta_{AB} = \int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} \quad \therefore \Delta\theta_{AB} = \frac{e}{\hbar} \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (215)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{e}{\hbar} \left[\int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_{(1)} - \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_{(2)} \right] \\ &= \frac{e}{\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{\hbar} \int_{\text{loop}} \mathbf{B} dS \\ &= 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad \Phi_0 \equiv \frac{h}{e} \end{aligned} \quad (216)$$

次に最初の問題に S 行列の方法の適用を考える．

5.4.2 相反性の解析

マクロな試料の縦磁気抵抗は，Onsager の相反定理に従い，一般に磁場 B に対して偶関数である．すなわち，

$$\rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(-B). \quad (217)$$

しかし，本来 Onsager の相反定理は (205) しか拘束条件のないものであり，メソスコピック（コヒーレント）伝導体では一般に上のようにはならない．(205) が (208) に与える条件は，

$$\alpha_{11}(B) = \alpha_{11}(-B), \quad \alpha_{22}(B) = \alpha_{22}(-B), \quad \alpha_{12}(B) = \alpha_{21}(-B) \quad (218)$$

である．

通常の 4 端子問題に適用して，13:電流端子，24:電圧端子，とした時の LB 流「電気抵抗」を $\mathcal{R}_{13,24}$ などと書くことにすると，

$$\mathcal{R}_{13,24} = \frac{V_2 - V_4}{J_1} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \quad (219)$$

となり，行列要素は Onsager の相反定理を満たしているが， \mathcal{R} は (217) のような磁場反転に対する対称性を満たさない．一方

$$\mathcal{R}_{24,13} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \quad (220)$$

と，(218) より，電流電圧端子を入れ替えた磁気抵抗は，磁場反転に対して対称である．一般に

$$\mathcal{R}_{mn,kl} = R_q \frac{T_{km}T_{ln} - T_{kn}T_{lm}}{D}, \quad D \equiv R_q^2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})S \quad (221)$$

なので，相反関係

$$\mathcal{R}_{mn,kl}(B) = -\mathcal{R}_{kl,mn}(-B) \quad (222)$$

が成立する．負号がついたのはもちろん単なる端子の順番の問題である．

これより，実際にメソスコピック試料に対して 4 端子を接続して測定したとき，どのような磁気抵抗が現れるか分析する上でも重要な手がかりを与えている．すなわち，一般に 4 端子測定においては磁場の反転 ($B \rightarrow -B$) を行っても測定される電気抵抗の値は同じになるとは限らない．しかし，電流電圧端子を入れ替えた上で逆向きの磁場の下で抵抗を測定すると，それは同じ値になっているべきである．

リング実験の紹介

5.5 エッジ状態と整数量子ホール効果

5.5.1 磁場中の 2 次元電子:Landau 量子化

ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ 中で運動する 2 次元電子のハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \{ \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \}^2 + V(\mathbf{r}) \quad (223)$$

とする．ランダウゲージを取り

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \quad (224)$$

とし，まず試料端を考えないで $V(\mathbf{r}) = 0$ とすると

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \{p_x^2 + (p_y + eBx)^2\} \quad (225)$$

となる． \mathcal{H} の固有関数を $\Psi(x, y)$ とすると，次のように書くことで y を分離することができる．

$$\Psi(x, y) = e^{iky} \psi(x) \quad (226)$$

これをシュレディンガー方程式 $\mathcal{H}\Psi = E\Psi$ に代入することで，

$$\left[\frac{1}{2m} \{p_x^2 + (-\hbar k + eBx)^2\} \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (227)$$

という x のみの方程式となる．ここで，

$$\text{磁気長 (magnetic length)} : l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}, \quad \text{ガイド中心} : X \equiv -l_B^2 k \quad (228)$$

l_B は磁場による位相のずれが 2π になるまでに電子の移動する距離でもある．(227) は

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + V_B(x - X) \right] \psi(x) \equiv \mathcal{H}_X \psi(x) = E\psi(x) \quad (229)$$

となる．ただし，

$$V_B(x) \equiv \frac{m\omega_c^2}{2} x^2 \quad (230)$$

で，磁場による閉じ込めポテンシャルである．(229) は，調和振動子のシュレディンガー方程式であることから，固有関数，固有値は

$$\psi_{n,X}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_B}} H_n \left(\frac{x - X}{l_B} \right) e^{-(x-X)^2/2l_B^2} \quad (231)$$

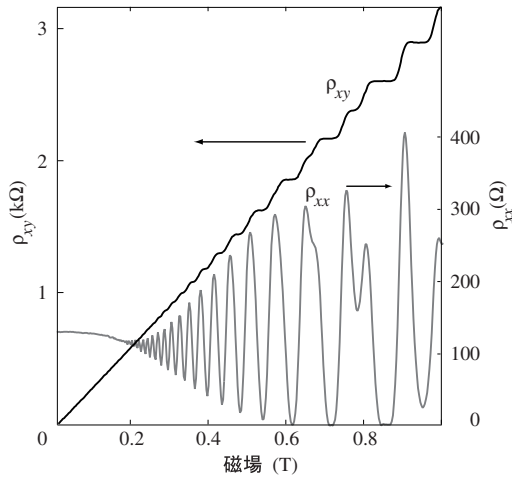
$$E_{n,X} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (232)$$

と書ける． H_n は n 次の Hermite 多項式である．これはランダウ量子化を表している．

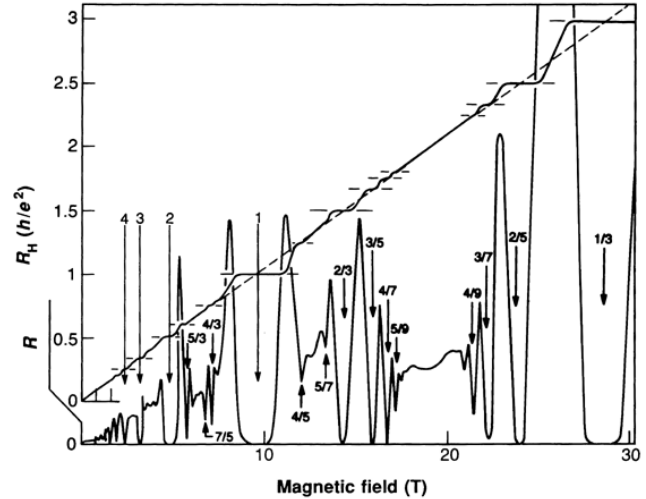
5.5.2 量子ホール効果

ランダウ量子化の結果生じる劇的な現象が，量子 Hall 効果 (QHE) である．QHE には基本的には 1 体の効果である整数量子ホール効果 (IQHE) と典型的多体効果である分数量子ホール効果 (FQHE) がある．また，IQHE にせよ，FQHE にせよ，これらを捉え，説明する視点も極めて多数存在する．ここでは，IQHE の最も簡単と思われる見方を紹介する．

典型的な実験結果を見ておこう．QHE の現れ方は，2 次元電子系 (two-dimensional electron system, 2DES) がどの程度クリーンであるかを表す指標の電子移動度に大きく依存する．図 8 に，比較的普通の移動度 $50\text{m}^2/\text{Vs}$ の 2DES に 30mK 程度の温度であまり強くない垂直磁場を加



(a)

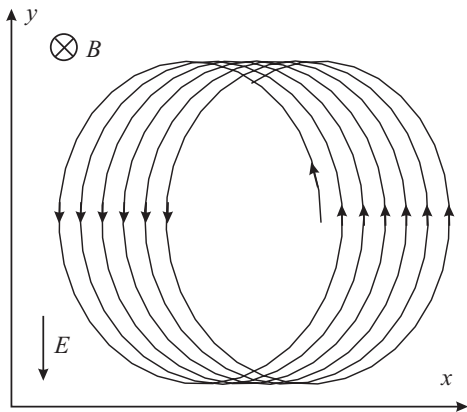


(b)

図 8: AlGaAs/GaAs ヘテロ接合に現れた量子ホール効果． ρ_{xx} (縦抵抗) , ρ_{xy} (ホール抵抗) を磁場の関数としてプロットした．(a) 低磁場のデータ． ρ_{xx} の細かい振動は Landau 量子化に伴って生じる Shubnikov-de Haas 振動． ρ_{xy} に現れている階段構造が整数量子ホール効果．0.65T 付近からスピンスピン分離が見られる．(b) 超高移動度 ($>1000\text{m}^2/\text{Vs}$) の試料で、高磁場領域に現れる分数および整数量子ホール効果．

えた時の縦抵抗 ρ_{xx} とホール抵抗 ρ_{xy} の磁場依存性を示す． ρ_{xx} に激しい振動が生じているが、これはシュブニコフ・ド・ハース振動と呼ばれるものである．ランダウ準位は、(232) からわかるように磁場によりそのエネルギー間隔が広がる．磁場増加とともに、フェルミ面およびそれより低いエネルギー領域にある準位の数減少する．ランダウ準位状態自身は電場方向に電流を流すことができないが、不純物やフォノンによる散乱があるとこれによって伝導が生じる．

5.5.3 エッジ状態



古典的な 2次元の電子に、2次元面に垂直な電場と面に平行な電場がかかった場合を復習しておこう．磁場 B を e_z 方向に、電場 E を xy 面内に加えたとする．Newton 方程式より、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eE_x - e\dot{y}B \\ m\ddot{y} = eE_y + e\dot{x}B \end{cases} \quad (233)$$

であり、これは簡単に解くことができ、

$$x = A \cos \omega_c t - (E_y/B)t, \quad y = A \sin \omega_c t + (E_x/B)t \quad (234)$$

という解を持つ．

これは上図のようなサイクロイドであり、回転半径 A は初速度で決まる．結局これは電場と直交する方向に一定の平均速度で移動する軌道を表す．このように、散乱のない 2DES に垂直磁場を加えると、電子を電場方向に流すことができない．また、この電場に直交する流れは平

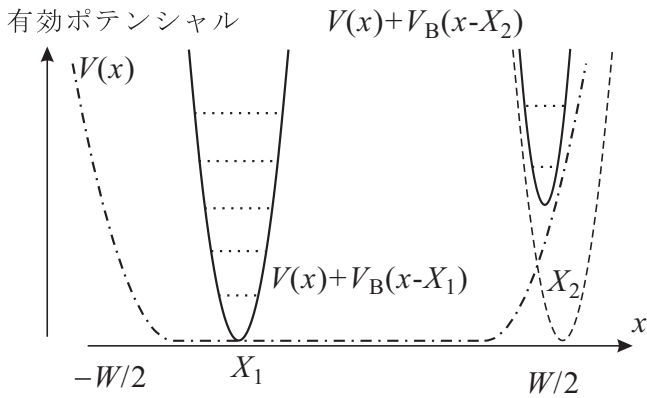


図 9: 試料の端と、端から離れたところでの電子に対する有効ポテンシャル。

均では電磁場より仕事をされることがなく、無散逸である。現実には散乱が存在し、この散乱によって電場方向への散逸のある電流が生じる。

以上を参考に、具体的な試料ポテンシャルの下で量子論の結果を見ていこう。2次元電子を y 方向に細長く切り出して y 方向に電流を流す状況を考え、ポテンシャルとしては x 方向で2次元電子を閉じ込める幅の広い「樋」のようなもの $V(x)$ を考える(図9)。樋の方向(y 方向)に電流を流し、 x 方向のホール電場を調べる試料のモデルである。量子ホール効果が生じて ρ_{xy} が磁場に対して平坦になっている状態では、図8で平坦部(プラトー)が明瞭に出ているところがそうであるように、 $\rho_{xx} = 0$ すなわち抵抗ゼロで超電流が流れている。そこで、簡単化して電場の y 成分 $E_y = 0$ で $E_x(x)$ のみ存在するとしよう。ランダウゲージのハミルトニアンは(225)に $V(x)$ と $eE_x(x)$ を加えたものになり、前と同様に x と y の分離をすることができる。 v_y の期待値 $\langle p_y \rangle / m$ は

$$\begin{aligned}
 \langle v_y \rangle &= \left\langle \Psi \left| \frac{1}{m} (p_y - eBx) \right| \Psi \right\rangle \\
 &= \left\langle \psi_{n,x}(x) \left| \frac{1}{m} eB(X - x) \right| \psi_{n,x}(x) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{eB} \left\langle \psi_{n,x}(x) \left| \frac{\partial \mathcal{H}_X}{\partial X} \right| \psi_{n,x}(x) \right\rangle
 \end{aligned} \tag{235}$$

となる。

図9で X が十分試料の内部で $V(x) = 0$ 、また、 E_x も電荷の再分布により内部では消えているとすると、(235)は(232)の X 微分でありゼロになる。この

$$\langle v_y \rangle = l_B^2 \frac{\partial E_X}{\hbar \partial X} = -\frac{\partial E_X}{\hbar \partial k} \tag{236}$$

は、ちょうど、1次元の群速度 $v_g = (1/\hbar)(\partial E/\partial k)$ に対応していて、ただし、 90° だけねじれた格好になっている。この式は、磁場が強ければ、 $V(x)$ (E_x) が存在する場合でも成立する。

端近傍では、 $V(x)$ の影響で、固有値は上昇し図10のようになる。この時、 $\partial E_X/\partial X$ が有限であるから、 $\langle v_y \rangle$ は有限になり、端に沿って電流が流れる。これは、古典的には端にぶつかりながら走るスキッピング軌道による電流に対応しており、サイクロトロン軌道は円として閉じずに試料を一周し、電流を生じる。ただし、これは平衡状態では単に試料を回っているだけであり、電極から流れ出す電流ではなく、試料の断面で積分すると零になる。このように、平衡状態で試料全体を回って閉じるサイクロトロン軌道に対応する状態を端状態と呼ぶ。

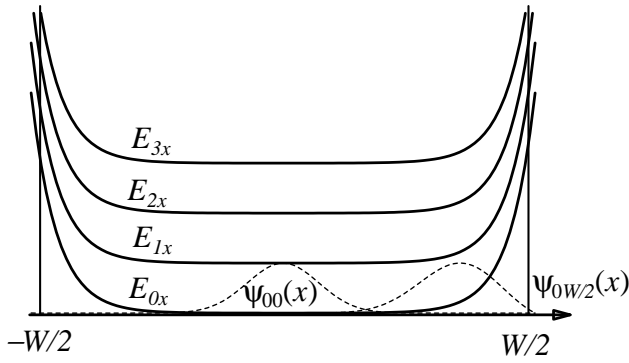


図 10: 兩楯型ポテンシャル中の 2DES に垂直磁場を印可した場合のエネルギー準位の模式図 .

次に，試料に電流が流れている非平衡状態について考える．この端近傍の試料の y 方向の長さを L_y として L_y で規格化すれば，この状態の運ぶ電流は $j = (e/L_y)v_y$ であるから，適当なエネルギー基準値 E_0 をとって，これより上の状態の運ぶ，ランダウ準位あたりの電流は

$$\begin{aligned} J &= \sum_X \frac{e}{L_y} v_y = \frac{L_y}{2\pi l^2} \int dX \frac{e}{L_y} v_y = \frac{|e|}{h} \int dX \frac{dE}{dX} \\ &= \frac{|e|}{h} (\mu - E_0) \end{aligned} \quad (237)$$

ここで，(227)，(228) より

$$\sum_X = \frac{L_y}{2\pi} \int dk = \frac{L_y}{2\pi l^2} \int dX$$

を用いた．この基準値以下の状態はすべて満たされているとすると，それらが運ぶ電流を試料断面で積分すると，電流密度が $(e/h)\partial E/\partial X$ で表されることから零になる．したがって，(237) の電流のみ考えればよい．

図 11 のような状況を考え，電極 A, B の化学ポテンシャルをそれぞれ μ_A, μ_B とする．左右の端電流の差が全体に流れる電流となると考える．すなわち，(237) で $\mu = \mu_A, E_0 = \mu_B$ と置くと， $J = (e/h)(\mu_A - \mu_B)$ となるので，

$$\sigma_{xy} = \frac{eJ}{\mu_A - \mu_{gB}} = \frac{e^2}{h} \quad (238)$$

これはランダウ準位が 1 つの時の伝導度であるから，ランダウ準位が ν 個あれば σ_{xy} はこの ν 倍になり，IQHE が説明された．

これは， x と y がクロスしている部分があるだけで，ランダウアー公式の導出とほとんど同じである．あたかも端に向きを持った 1 次元的な伝導チャンネルが存在してそこだけを電流が流れているかのようである．すなわち，ランダウアー公式は量子細線を左右に流れるチャンネルがあり，その化学ポテンシャルの差が全体の電流になるとして導かれた．今の場合，それが試料の両端に分かれ，ホール電圧分だけの化学ポテンシャル差を持っているとしている点が違うだけである．ただし，QPC の時はそれ程精確な量子化が得られなかったのに，IQHE では極めて精確になるのはこの違いが原因である．すなわち，QPC では左右方向のチャンネルが空間的に重なっているため，電子の向きを反転させる散乱が容易に起こってこれは透過率 T を 1 からずらしてしまう．それに対し，IQHE の場合，端状態間にはマクロな空間的隔たりがあって散乱は全くないと考えて良く，ランダウアー公式流に言えば透過率は完全に 1 である．従って，

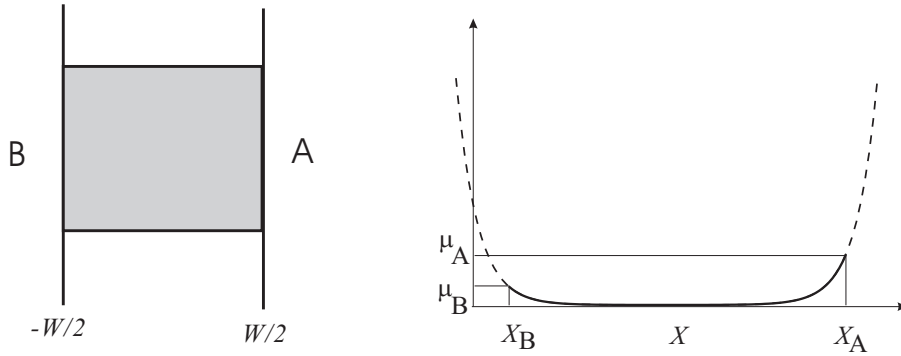


図 11:

逆に試料幅を狭めて端状態間の散乱を起こりやすくすると IQHE の量子化も精確でなくなると考えられ、実験でも確かめられている。

5.6 Fano 効果

5.6.1 離散系と連続系

これまでの講義では、まず、電子回路の力学を支配する力学変数を探してこれを量子化するところから始まり、中心部分のやや詳細な量子効果を調べることで量子ドットを導入した。更に、量子ドットと電極とのやりとり、電極中のフェルミ縮退を考えることで近藤効果という量子多体効果が生じることを示した。本節では、「電極」の部分の量子効果に着目し、QPC における伝導度量子化や整数量子ホール効果について見てきた。そこで、量子ドットのような局在系と、フェルミ面に連続準位を持つ系が混在し、連続系の量子コヒーレンスを考えなければならぬ場合に何が生じるか考えてみよう。

離散準位を持つ系を $|\varphi\rangle$ で表し、連続準位を持つ系の状態を、エネルギー E' で指定して $|E'\rangle$ と書こう。ハミルトニアン \hat{H} を次のように定義しよう。

$$\begin{cases} \langle\varphi|\hat{H}|\varphi\rangle = E_\varphi, \\ \langle E'|\hat{H}|\varphi\rangle = V_{E'}, \quad (\text{Interaction}) \\ \langle E''|\hat{H}|E'\rangle = E'\delta(E'' - E'). \end{cases} \quad (239)$$

$V_{E'}$ は離散準位と連続準位の相互作用を表している。

\hat{H} のエネルギー ϵ を固有値とする固有状態を $|\psi_\epsilon\rangle$ と書き、これを相互作用前の $|\varphi\rangle, |E'\rangle$ で展開してみる。

$$|\psi_\epsilon\rangle = a|\varphi\rangle + \int dE' b_{E'}|E'\rangle. \quad (240)$$

$\hat{H}|\psi_\epsilon\rangle = \epsilon|\psi_\epsilon\rangle$ より、係数 $(a, b_{E'})$ に関する条件を求める。

$$aE_\varphi + \int dE' b_{E'}V_{E'}^* = a\epsilon, \quad (241)$$

$$aV_{E'} + E'b_{E'} = b_{E'}\epsilon \quad (242)$$

上の (242) は $\epsilon = E'$ で異常が生じることを示している．このような場合の，散乱問題の処方箋は，

$$b_{E'} = V_{E'} a \left(\frac{P}{\epsilon - E'} + z(\epsilon) \delta(\epsilon - E') \right) \quad (243)$$

とすることであった．単純な散乱問題では $z(\epsilon) = i\pi$ と置くのであった．しかし，今は，定常状態を考えており，従って散乱は繰り返し生じる．ここを丁寧に考察する必要がある．(240)，(243) を

$$\langle \psi_\epsilon | \hat{H} | \psi_\epsilon \rangle = \epsilon$$

へ代入して，

$$E_\varphi + \int dE' V_{E'}^* V_{E'} \left[\frac{P}{\epsilon - E'} + z(\epsilon) \right] = \epsilon \quad (244)$$

である．ここで，

$$F(\epsilon) \equiv P \int dE' \frac{|V_{E'}|^2}{\epsilon - E'}$$

と置くと，

$$z(\epsilon) = \frac{\epsilon - E_\varphi - F(\epsilon)}{|V_\epsilon|^2} \quad (245)$$

と求められる．

これを用いて， $(a, b_{E'})$ を最終的に求めるには，更に，規格化条件

$$\langle \psi_{\epsilon'} | \psi_\epsilon \rangle = a^*(\epsilon') a(\epsilon) + \int dE' b_{E'}^*(\epsilon') b_{E'}(\epsilon) = \delta(\epsilon' - \epsilon) = \delta(\epsilon' - \epsilon) \quad (246)$$

を課す．以下，計算の詳細は略す [1] が，結果は

$$a(\epsilon) = \frac{\sin \Delta}{\pi V_\epsilon} \quad (247)$$

$$b_{E'}(\epsilon) = \frac{V_{E'}}{\pi V_\epsilon^*} \frac{\sin \Delta}{\epsilon - E'} - (\cos \Delta) \delta(\epsilon - E') \quad (248)$$

$$\Delta \equiv -\arctan \frac{\pi |V_\epsilon|^2}{\epsilon - E_\varphi - F(\epsilon)} \quad (249)$$

となる．

この系に入射波 $|i\rangle$ があったとし，これがどのように ψ_ϵ へ遷移するかを考える．この遷移を起こす演算子を \mathcal{T} としよう．

$$|i\rangle \xrightarrow{\mathcal{T}} |\psi_\epsilon\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_\epsilon | \mathcal{T} | i \rangle &= \langle \varphi | \mathcal{T} | i \rangle + \int dE' V_{E'} \left[\frac{P}{\epsilon - E'} + z(\epsilon) \delta(\epsilon - E') \right] \langle E' | \mathcal{T} | i \rangle \\ &= \langle \Phi | \mathcal{T} | i \rangle - \langle \epsilon | \mathcal{T} | i \rangle z(\epsilon). \end{aligned} \quad (250)$$

ここで， $|\Phi\rangle$ は連続状態との相互作用によって変化した局在状態であり，

$$|\Phi\rangle = |\phi\rangle + P \int dE' V_{E'} \frac{1}{\epsilon - E'} |E'\rangle. \quad (251)$$

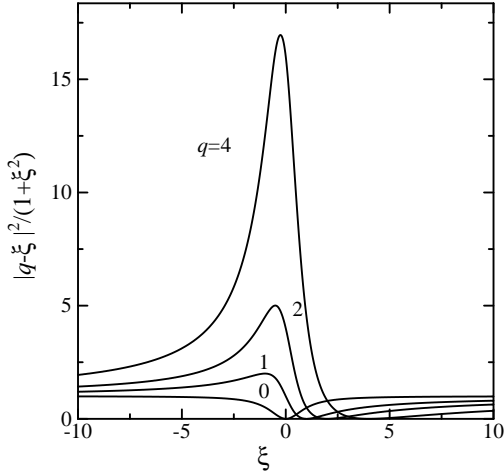


図 12: Fano パラメタ q を変化させた時の遷移確率 (255) の ξ 依存性をプロットしたもの。

これを使うと,

$$\frac{\langle \psi_\epsilon | \mathcal{T} | i \rangle}{\langle \epsilon | \mathcal{T} | i \rangle} = \left[\frac{\langle \Phi | \mathcal{T} | i \rangle}{\langle \epsilon | \mathcal{T} | i \rangle} - z(\epsilon) \right] a = (q - \xi) a. \quad (252)$$

ここで q は Fano パラメタと呼ばれる量で

$$q \equiv \frac{\langle \Phi | \mathcal{T} | i \rangle}{\langle \epsilon | \mathcal{T} | i \rangle}, \quad (253)$$

また,

$$\xi = z(\epsilon) = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\Gamma}, \quad \epsilon_0 \equiv E_\varphi + F(\epsilon), \quad \Gamma \equiv |V_\epsilon|^2 \quad (254)$$

である。ここで, (247) より $a^2 = 1/(1 + \xi^2)$ であるから,

$$\frac{|\langle \psi_\epsilon | \mathcal{T} | i \rangle|^2}{|\langle \epsilon | \mathcal{T} | i \rangle|^2} = \frac{|q - \xi|^2}{1 + \xi^2} \quad (255)$$

が得られる。

ここで得た量が, 量子ドットの場合に何に当たるのか考えてみよう。ここでは, 系を離散系 (量子ドット) と連続系 (電極) とに分け, そのハイブリッド状態 (ψ_ϵ) への入射波 $|i\rangle$ の遷移確率が分子である。分母は連続状態への遷移確率であるが, 今, 2 端子的 (擬似 4 端子と良く呼ばれる) な素子を考え, 電流路をハイブリッド状態が完全にブロックしていると考え, 連続状態への遷移は 1 次では反射のみであるから, (255) の分母は, 反射確率を表していることになる。結局, 離散系+連続系の合成系の透過確率を T とすると, (255) は

$$\frac{T}{1 - T}$$

を計算していることになり, 擬似 4 端子でこの系を測ったときの伝導度に掛かる係数と考えて良い。

(255) は図 12 に示したように, 大変特徴的なスペクトルを与える。すなわち, 共鳴の中心付近でピークと, 遷移確率がゼロになるディップ構造を持っている。これは, 共鳴散乱を起こす共鳴体の中にもう一つの共鳴体がある時の特徴であり, 内部の共鳴体を通る波の位相シフトは, 内部共鳴を通る時に π だけ変化するため共鳴が反共鳴に急激に変化してこのようなことが生じる。

参考文献

- [1] U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [2] 勝本信吾, 「メゾスコピック系」 (朝倉書店, 2002).